SHEILA DENIZE GUIMARÃES

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA POR ALUNOS DE 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL:ASPECTOS COGNITIVOS E DIDÁTICOS

UNIVERSIDADE CATÓLICA DOM BOSCO
Campo Grande
2005

SHEILA DENIZE GUIMARÃES

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA POR ALUNOS DE 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL:ASPECTOS COGNITIVOS E DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação da Universidade Católica Dom Bosco como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Educação.

Área de Concentração: Educação Escolar e Formação de Professores

Orientador: Profª Drª Leny Rodrigues Martins Teixeira .

UNIVERSIDADE CATÓLICA DOM BOSCO
Campo Grande
2005

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA DE ALUNOS DE 3ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL: ASPECTOS COGNITIVOS E DIDÁTICOS

SHEILA DENIZE GUIMARÃES

BANCA EXAMINADORA:

____

Profª Drª Maria Teresa Carneiro Soares

____

Profª Drª Josefa Aparecida Gonçalves Grígoli

____

Profª Drª Leny Rodrigues Martins Teixeira .

GUIMARÃES, Sheila Denize. *A resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3ª série do ensino fundamental: aspectos cognitivos e didáticos.* Campo Grande, 2005, 133 p. Dissertação (Mestrado) Universidade Católica Dom Bosco.

RESUMO

O presente estudo, relacionado à linha de pesquisa "Práticas pedagógicas e suas relações com a prática docente", teve como objetivo geral analisar a resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3ª séries do ensino fundamental, visando identificar que tipos de problemas apresentam dificuldades para os alunos, bem como os prováveis aspectos, de ordem cognitiva ou didática, que as condicionam. Os sujeitos dessa pesquisa foram trinta alunos de duas escolas particulares e uma escola pública de Campo Grande/ M.S. A escolha das escolas foi feita levando-se em conta o tipo de material didático utilizado (livro didático Vivência e Construção de Luiz Roberto Dante e o material apostilado do Grupo Positivo). O levantamento de dados aconteceu em duas etapas. Na primeira etapa foi feito um levantamento dos tipos de problemas de estrutura aditiva, apresentados pelos materiais, comparados às relações de base aditiva, propostas por Vergnaud, com intuito de descrever a variedade de situações apresentadas por esses materiais. Na segunda etapa, mediante os resultados obtidos, foram selecionados nove problemas de estrutura aditiva para compor uma prova aplicada aos alunos de duas formas: coletiva e individual. Do ponto de vista didático, os resultados mostraram que não é possível atribuir a origem das dificuldades dos alunos no momento da resolução, à freqüência e à natureza dos problemas de estrutura aditiva nos materiais didáticos. Do ponto de vista dos aspectos cognitivos, verificou-se que, independente da forma de aplicação das provas (individual ou coletiva) o índice de acertos foi menor nos mesmos problemas. Concluiu-se ainda que o grau de dificuldade passou a ser maior quando os problemas: 1) apresentavam incongruência entre a operação a ser realizada e os verbos ou expressões portadoras de informação; 2) não buscavam os estados (inicial, intermediário ou final), mas sim as relações ou transformações; 3) exigiam inversão da seqüência temporal. Acredita-se que o professor tem um papel fundamental na superação de tais dificuldades, quando entende que os problemas visam à construção dos conceitos e que a operacionalidade desses deve ser provada diante de situações variadas.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de problemas, Estrutura aditiva, Ensino Fundamental de Matemática, Material didático.

GUIMARÃES, Sheila Denize. The solution of problems with an addition structure from the pupils of the third year of the fundamental teaching: cognitives and teaching aspects. Campo Grande, 2005, 133 p. Paper (Master's) Dom Bosco Catholic University- UCDB.

ABSTRACT

The present study, related to the research line " Educational practices and their relationship with the teacher's practice", had as general objective to analise the solution of problems with an addition structure from the pupils of the third year of the fundamental teaching, aiming to identify which kind of problems present difficulties to the pupils, as well as the probable aspects, of cognitive or teaching aspects, which are conditioned to them. The subjects of this research were thirty pupils who belonged, on the whole, to two private school and one state school of Campo Grande/ MS. The choice of the schools was made, bearing in mind the kind of teaching material used (the textbook called Vivência e Construção of Luiz Roberto Dante and the teaching lecture notes of Positivo Group).The collection of datas took place in two stages. In the first stage it was made a collection of problems with an addition structure, presented by the teaching materials, compared to the relationship of addition base, proposed by Vergnaud, aiming to describe the variety of situations presented by these teaching materials.In the second stage, based on the obtained results, nine problems with an addition structure were selected to compose a test which was given to the pupils in two ways: collective and individual. From the teaching point of view, the results showed that it is not possible to attribute the origem of the pupils' difficulties in the moment of the solution, to the frequence and nature of the problems with an addition structure in the teaching materials. From the cognitive aspects, it was checked that, irrespective of the way of the presentation of the test (individual or collective) the index of the right answers was smaller in the same problems. It was still concluded that the degree of the difficulty was bigger when the problems: 1) presented desconnection between the operation to be solved and the verbs or expressions in which the informations were; 2) didn't search state (begginer, intermediate or final), but the relationship or transformations; 3) demanded inversion of the time sequence. It is believed that the teacher has a fundamental role in overcoming these kind of difficulties, when the one understands that the problems aim the building of concepts and that their solving must be proved by various situations.

KEY WORDS: Solving problems, Addition structure, Fundamental teaching of Mathematic, Teaching material.

Dedico este trabalho às pessoas que compartilharam comigo de todos os momentos desta caminhada.

AGRADECIMENTOS

À Deus.

À minha família pela paciência e compreensão neste período de estudos.

Aos amigos inseparáveis pela companhia na alegria e na tristeza.

À equipe pedagógica do Colégio Salesiano Dom Bosco pelos incentivos para prosseguirmos nos aprimorando profissionalmente.

Aos professores, colegas e funcionários do Programa de Mestrado em Educação da UCDB pela atenção, apoio e amizade.

Aos funcionários das escolas envolvidas na pesquisa pela colaboração e disponibilidade.

À amiga Jael Bittencourt pela tradução feita.

À UCDB / PROSUP pela bolsa de estudos concedida durante o período de estudos.

Às professoras Drª Maria Teresa Carneiro Soares e Dr.ª Josefa Aparecida Gonçalves Grígoli pelas sugestões no exame de qualificação.

À professora Drª Leny Rodrigues Martins Teixeira pela orientação concedida em todos os momentos deste período de estudos.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

ANEXO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apesar das constantes pesquisas mostrando a importância do ensino da Matemática para se obter um melhor desempenho nas situações vividas no dia-a-dia é comum presenciarmos depoimentos de crianças que afirmam não gostarem dessa disciplina. Vários autores têm feito referência a esta questão, em vários países. Zunino (1995), por exemplo, realizou um estudo diagnóstico na Venezuela para evidenciar a situação do ensino da Matemática na escola e as constatações realizadas não diferem muito do que mencionamos anteriormente.

Muitas crianças

> [...] afirmam que a matemática é a disciplina de que menos gostam, e poucas as que escolhem como uma de suas disciplinas prediletas. Inclusive algumas crianças que têm rendimento muito bom em matemática expressam uma opinião contrária a ela (Ibidem, p.4).

Agregado ao fato das crianças não gostarem da disciplina, o baixo rendimento em matemática é ainda mais preocupante. Uma pesquisa recente realizada por Carnoy, Gove e Marshall (2003) apresenta os resultados de uma análise das práticas de ensino de matemática em salas de aula de 3ª série em escolas de três países: Brasil, Chile e Cuba. Os dados apontam que as escolas brasileiras se enquadram na categoria de aulas menos exigentes em termos de capacidade cognitiva exigida dos alunos, obtendo a média mais baixa tanto em demanda cognitiva como em proficiência matemática. Essa média está relacionada ao formato das aulas, centradas na aquisição de respostas corretas sem desenvolver a compreensão. “Grande parte das aulas brasileiras consistia na professora escrevendo no quadro-negro, os alunos copiando, com pouca interação. As explicações, quando ocorriam, limitavam-se a descrever o procedimento sendo utilizando" (Ibid., p.21).

Esse aspecto emergiu quando foi analisado o modo de apoio predominante empregado nas aulas. Os resultados mostraram que as professoras brasileiras, com algumas exceções, usavam trabalho individual ou trabalho em grupo, sem usar modos múltiplos de interação, como faziam as professoras chilenas e cubanas. Os autores acreditam que o uso de um método mais estático nas aulas brasileiras, seja uma forma de exercer controle sobre os alunos, a fim de manter a disciplina.

Echeverría (1998) mostra duas concepções de Matemática que influenciam as idéias que os alunos e professores possuem sobre o ensino da matemática. A primeira é a concepção formalista e idealista originária de Platão, da qual é possível inferir que um aluno terá sucesso em matemática se for capaz de raciocinar e pensar de maneira adequada. A segunda concepção mais utilitária da Matemática tem origem em Aristóteles e pode ser observada na prática de muitos professores. Segundo essa concepção, o aluno deverá adquirir "determinadas técnicas e estratégias suscetíveis de aplicação em diferentes campos, e não na compreensão estrutural dos aspectos formais" (Ibid., p.45).

Nunes e Bryant (1997) apontam algumas crenças difundidas pela nossa sociedade a respeito da Matemática e que contribuem para que ela não esteja entre as disciplinas que as pessoas gostem mais:

- A Matemática é um tipo especial de atividade[...]
- A Matemática é aprendida na escola- consequentemente, as pessoas que não foram à escola não sabem matemática.
- A Matemática é algo que exige qualificações- se você não tem qualificações você não pode saber muita matemática.
- A Matemática é abstrata e não se refere ao mundo cotidiano- portanto, você não aprende sobre matemática na vida cotidiana.
- A Matemática é difícil; poucas pessoas obtêm qualificações em matemática- isso significa que poucas pessoas sabem matemática. (p.105)

Essas crenças repercutem na escola e são reforçadas pela concepção de ensino e aprendizagem presente na prática desenvolvida pela maioria dos professores, na qual “ensinar consiste em explicar, aprender consiste em repetir (ou exercitar) o ensinado até reproduzi-lo fielmente” (ZUNINO,1995 p.11).

Essa relação preestabelecida entre professor e aluno é o que Brousseau (1988) denomina de contrato didático, entendido como o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor.

Um dos grandes entraves que a Matemática enfrenta, conforme aponta Echeverría (1998), está relacionado ao contrato didático fortemente marcado por um ensino voltado para apreensão de regras e aplicações em exercícios, nos quais os números dados devem ser rapidamente articulados para encontrar-se uma solução única.

Quando o ensino assume essa prática, o gostar da disciplina se torna cada vez mais difícil, visto que realizar sempre as mesmas coisas não as tornam prazerosas e nem tão pouco reduz a dificuldade enfrentada pelos alunos. Nesse caso, a rotina se resume na explicação da professora e resolução de problemas de aplicação, e quando muito, é introduzido um jogo pedagógico para iniciar a explicação ou aplicar o conteúdo aprendido. Muitos professores acreditam que por estarem utilizando a resolução de problemas para exigir a aplicação do conceito aprendido, estão dinamizando as aulas, haja vista que esta metodologia é recomendada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 2000). Mesmo que estes problemas estejam “mais voltados para a reprodução de modelos do que para a compreensão conceitual” (PAIS, 2001, p.56).

Podemos complementar essa idéia com Chevallard, Bosch e Gascón (2001) quando afirmam que a atividade de resolução de problemas utilizada como reprodução é entendida como um *fim* em si mesmo, contrariando o seu verdadeiro propósito, ou seja "um *meio* para responder a questões relativas a determinada problemática real que se pretende estudar" (p.130).

Para Gómez-Granell (1997) "a maior parte das pessoas pode aprender matemática sem nenhuma dificuldade, desde que tal aprendizagem esteja vinculada a contextos e situações que sejam cultural e socialmente significativos" (p.275). Complementa afirmando que para ensinarmos matemática de maneira significativa devemos conhecer "os usos e as funções que o conhecimento matemático cumpre em nossa sociedade e situar a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos no contexto de tais usos e funções" (Ibid.).

Afirmar que os conceitos serão melhor compreendidos sempre que houver vinculação com a realidade dos alunos parece óbvio para todo mundo, menos para a escola, que continua ensinando aos alunos algoritmos ou quando muito, problemas de uma classe muito restrita, nos quais a solução, em geral, já está apontada pelo enunciado.

Charnay (1996) afirma que "um dos objetivos essenciais (e ao mesmo tempo uma das dificuldades principais) do ensino da matemática é precisamente que o que se ensine esteja carregado de significado, tenha sentido para o aluno" (p. 37). Ao mesmo tempo que isso representa um dos nossos objetivos essenciais, ele é também, o nosso grande desafio enquanto professores -"tornar a matemática interessante, isto é atrativa; relevante, isto é útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje" (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15).

Podemos inferir diante de todas essas colocações que a resolução de problemas é uma proposta para o ensino da matemática que tem sido apontada por vários autores como uma alternativa para o desafio anunciado por D'Ambrósio (1989).

Entretanto, embora essa alternativa pareça ser bastante razoável para colocar o ensino da matemática em maior contato com a realidade do aluno e envolvê-lo na atividade matemática de forma significativa , a metodologia baseada na resolução de problemas não é de fácil utilização. Pesquisas, como as realizadas por Vasconcelos (1998) e Alves (1999), apontam que as crianças possuem dificuldade para resolver problemas. Por um lado, a dificuldade está relacionada à obtenção da informação matemática e por outro, refere-se à escolha da operação adequada para resolver o problema.

Trabalhando a matemática com crianças de 3ª série pudemos constatar essa dificuldade no momento da escolha da operação a ser empregada durante a resolução de problemas, demonstrada principalmente quando se ouvia ao fundo da sala aquela pergunta típica: É de mais ou de menos?

> Quem já não ouviu perguntas como essa formuladas quando alunos do primeiro grau tentam resolver problemas de adição ou subtração? Por que as crianças têm dificuldade com esse tipo específico de problema aritmético? Por que nem sempre conseguem identificar a operação aritmética necessária para a resolução dos problemas? (VASCONCELOS, 1998, p.55)

Mediante os estudos realizados enquanto professora, foi possível perceber que esta dúvida não era restrita somente aos alunos com os quais trabalhávamos. Existia um universo maior de crianças que compartilhavam das mesmas dificuldades. Sendo assim, nos propusemos a compreender porque os alunos sentem dificuldade em resolver problemas. Por que apresentam dificuldades em identificar a operação necessária para resolvê-los e a quais fatores elas podem estar associadas?

Além dessa justificativa de natureza pessoal, o estudo aqui proposto tem, também, como finalidade, apresentar contribuições no âmbito das pesquisas que focalizam o ensino da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental e, quiçá contribuir para repensar práticas pedagógicas de profissionais interessados em compreender os aspectos que envolvem a resolução de problemas de estruturas aditivas.

Para investigar o problema descrito recorremos à Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud que apresenta a adição e a subtração como componentes de um mesmo campo conceitual, o das estruturas aditivas. Procuramos caracterizar o estruturas aditivas, tecendo considerações a respeito dos diferentes tipos de problemas e situações que envolvem, especificamente a adição e a subtração, conforme descrito no capítulo I.

No capítulo II, apresentamos as discussões referentes à resolução de problemas como metodologia de ensino. Encerrando a fundamentação teórica, discorremos a respeito dos resultados de algumas pesquisas conduzidas com crianças que têm como foco a resolução de problemas relativos às estruturas aditivas.

O capítulo III contém os procedimentos adotados em função dos objetivos do estudo e a coleta de dados realizada com alunos de 3ª série do Ensino Fundamental.

No capítulo IV apresentamos a descrição dos principais resultados encontrados durante o levantamento dos problemas de estrutura aditiva presentes nos manuais de Matemática utilizados como materiais didáticos e durante a aplicação das provas coletiva e individual.

No capítulo V trazemos as discussões dos resultados obtidos, tentando responder os questionamentos iniciais, seguido das considerações finais.

CAPÍTULO I

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria do Campos Conceituais tem por finalidade repensar as condições de aprendizagem conceitual, de maneira que se torne mais acessível à compreensão do aluno, sendo desenvolvida "para tentar melhor compreender os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento" (VERGNAUD, 1996, p.11). Para tanto, o autor considera tanto aspectos da teoria de Piaget, relativos às estruturas lógicas e desenvolvimento das operações do pensamento, como da teoria de Vygotsky, relativos ao papel da linguagem e das formas simbólicas.

Dentre as contribuições de Piaget para a Teoria dos Campos Conceituais podemos mencionar sua brilhante análise de como o desenvolvimento do conhecimento humano é lento. Esse aspecto é considerado por Vergnaud (1982) quando afirma que os processos de conceitualização se desenvolvem ao longo de vários anos. Uma outra contribuição de Piaget diz respeito ao conceito de esquema, fundamental para a formulação da Teoria dos Campos Conceituais.

Para Piaget (1971) os esquemas são organizadores da ação que se ajustam a várias situações. O papel do esquema é essencialmente o de assegurar a incorporação ou a assimilação de novos objetos à própria ação.

Vergnaud (1990) amplia a definição de esquema de Piaget, caracterizando-o como "a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada" e afirma que "é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória" (p.2).

Um outro princípio da teoria de Piaget, considerado e aprimorado por Vergnaud está relacionado ao agrupamento denominado composição aditiva de classes. Essa composição admite a reversibilidade, o que significa que cada elemento do conjunto tem um oposto que, combinado a ele, reverte a operação ao ponto de partida. Em se tratando da adição, podemos afirmar que esta é uma operação- ação interiorizada reversível- "posto que comporta uma inversa(a subtração) e porque o sistema de adições e subtrações comporta leis de totalidade" (DOLLE, 1983, p.60).

Quanto às contribuições de Vygotsky, Vergnaud (1990) considera que a linguagem e os símbolos têm um papel na conceitualização e na ação. No entanto, essas formas lingüisticas "serão analisadas como instrumentos do pensamento, não como objetos do pensamento" (p.22). A linguagem assume para Vergnaud a função de comunicação, de representação e de auxílio ao pensamento e à organização da ação.

A partir dessas contribuições Vergnaud elabora a Teoria dos Campos Conceituais. De acordo com Vergnaud (1982) "um campo conceitual é um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas firmemente unidos uns aos outros" (p.12). Podemos pensar em situação como "um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço e tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações" (FRANCHI,1999 p.158).

A Teoria dos Campos Conceituais é "uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista do seu conteúdo conceitual" (VERGNAUD, 1990, p.1).

Apesar dos estudos de Vergnaud estarem voltados para a formação de conceitos matemáticos, a Teoria dos Campos Conceituais pode ser aplicada a qualquer área do conhecimento. Pais (2001) afirma que sua grande aplicabilidade à matemática está relacionada ao fato de a teoria respeitar uma estrutura progressiva na elaboração de conceitos. Para KOCH (2002) essa teoria representa uma etapa decisiva na maneira de encarar as relações entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a didática da matemática.

VERGNAUD (1985) justifica a necessidade de estudar campos conceituais por considerar que há uma reciprocidade muito grande entre conceito e situação, tendo em vista que um conceito remete a muitas situações e uma situação remete a muitos conceitos. Na realidade, o desenvolvimento dos conhecimentos de uma criança se faz por meio de um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existe parentesco, como é o caso da adição/subtração e da multiplicação/divisão.

Diante desta perspectiva, esse autor considera que é sobretudo por meio de situações-problema que um conceito adquire sentido para a criança, distinguindo duas classes de situações com as quais ela entra em contato. A primeira constitui a classe de situações nas quais o sujeito dispõe das competências necessárias para o tratamento da situação, e outra, em que o sujeito por não deter todas as competências necessárias, precisa de um tempo maior para refletir, explorar e fazer tentativas que poderão conduzi-lo ou não ao sucesso (KOCH, 2002).

A forma como a criança procura fazer frente a essas diferentes situações depende dos esquemas que ela possui. O conceito de esquema mantém, portanto, estreita relação com as duas classes de situações, porém funciona de maneira diferente em cada uma delas. Na primeira classe o comportamento é amplamente automatizado, organizado por um só esquema e na segunda existe a utilização sucessiva de vários esquemas, "que podem entrar em competição e que para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Esse processo é necessariamente acompanhado por descobertas" (VERGNAUD, 1990, p.2).

Teixeira (1992) aponta que "na medida que a criança tem oportunidade de enfrentar situações-problema mais diversificadas há a possibilidade de tornar um conceito matemático mais funcional e significativo" (p.88). Esse pensamento traduz a proposta de Vergnaud (1990) ao definir os campos conceituais e mostra a importância das situações-problema como forma de fazer o sujeito avançar.

Vergnaud (Ibid.) utiliza o exemplo da enumeração para mostrar como o esquema sustenta as competências matemáticas em crianças de cinco anos, quando essas contam uma coleção qualquer. A ação de contar exige "a coordenação dos movimentos dos olhos e gestos e das mãos em relação à posição dos objetos, enunciação coordenada da série numérica, cardinalização do conjunto enumerado por destaque tonal ou pela repetição da última palavra-número pronunciada..." (p.2). Além da cardinalidade, o esquema de enumeração traz consigo um outro invariante necessário ao seu funcionamento- a bijecção (correspondência termo a termo).

Dessa forma, um esquema é uma totalidade organizada que engendra uma classe de comportamentos distintos em função das peculiaridades de cada situação ao qual se destina. Essa diversidade só é possível porque o esquema envolve:

- invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que dirigem o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a tomada da informação sobre a situação a tratar;

- antecipações da meta a atingir, efeitos esperados e eventuais etapas intermediárias;
- regras de ação do tipo "se... então..."que permitem gerar a seqüência das ações do sujeito;
- inferências (ou raciocínios) que permitem "calcular" as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórias de que o sujeito dispõe. (VERGNAUD, 1990, p. 19)

Segundo Vergnaud (1985) os invariantes operatórios desempenham o papel de núcleo central da representação, visto que organizam a ação, mediante objetos, propriedades, relações e processos que o pensamento recorta no real.

Vergnaud (1990) afirma que os teoremas-em-ação são "invariantes do tipo 'proposição': podem ser verdadeiras ou falsas" e os conceitos-em-ação são "invariantes do tipo 'função proposicional': não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas constituem marcos indispensáveis à construção das proposições" (p.6).

Moro (1998) baseando-se em Vergnaud afirma que os teoremas-em-ação "designam as propriedades das relações encontradas pelo sujeito quando age sobre a realidade e resolve o problema." Para empregá-los o sujeito não precisa saber explicá-los ou justificá-los (p.8).

Podemos evidenciar os teoremas-em-ação quando pedimos para uma criança contar quantas pedras existem sobre a mesa. A criança vai e conta: um, dois, três. Acrescentamos a quantidade inicial mais duas pedras e perguntamos quantas pedras estão agora sobre essa mesa. Uma criança de 5 anos contaria tudo: um, dois, três, quatro, cinco. Dois anos mais tarde a mesma criança não recontará o todo. Ela vai conservar a quantidade inicial (três) e contar a partir dela: três, quatro, cinco. Esse teorema é simples e pode ser expresso por: cardinal (A U B) = cardinal A + cardinal B.

Os conceitos-em-ação designam as peças componentes dos teoremas-em-ação, sendo os instrumentos nocionais para resolver o problema, sem possuir a necessidade de serem explicitados pelo sujeito (MORO, 1998.). Os conceitos-em-ação não existem sem os teoremas-em-ação, mas só têm sentido em proposições verdadeiras, por meio das quais podem exercer sua função.

Os conceitos-em-ação podem ser evidenciados no exemplo mencionado acima, quando a criança faz a enunciação coordenada da série numérica: um, dois, três, quatro.

Em síntese, podemos dizer, conforme afirma Franchi (1999) que "a operacionalidade de um conceito abrange uma diversidade de situações manifestando-se sob uma variedade de ações e de esquemas" (p.164).

Um outro fator considerado por Vergnaud (1990) determinante na elaboração dos conceitos é a linguagem, que assume a função de comunicação e representação. A linguagem favorece o cumprimento da tarefa e a resolução do problema enfrentado, na medida em que auxilia o pensamento e se encarrega de fazer a representação do mesmo.

Para Vergnaud (1990) a linguagem e os outros significantes (gestos, desenhos, tabelas...) assumem uma função tríplice na teoria dos campos conceituais à medida que "ajuda à designação e, portanto, à identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações e teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e metas, à planificação e ao controle da ação" (p.18).

A linguagem se faz presente em situações em que o sujeito precisa planificar e controlar uma ação que ele não domina, não sendo necessária em atividades automatizadas, sendo um instrumento da ação e não objeto da mesma.

Vergnaud (1990) considera um conceito como uma trinca de conjuntos.

> Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações (S) que dão sentido ao conceito(referência), um conjunto de invariantes (I) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas(significado) e um conjunto de formas de linguagem (Y) que podem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento(significante) (p.8).

Essa tríade é representada pelas insígnias S, I e Y, respectivamente.

Vergnaud (apud TEIXEIRA,1992) justifica a referência a situações [S] baseando-se em razões de ordem funcional, estrutural ou desenvolvimentista.

> Do ponto de vista funcional, as situações indicam o sentido da aprendizagem, ou seja, implicam um para quê ou quando. Por exemplo: em que situações é preciso somar ou subtrair? Para que serve um número negativo?
> Do ponto de vista estrutural, as situações envolvem uma diversidade de tarefas cognitivas. Por exemplo, a operação de subtrair aplicada a uma situação para saber o que resta após uma consumação é diferente da subtração para achar uma diferença ou para encontrar o estado inicial de uma coleção aumentada.
> Do ponto de vista desenvolvimentista e epistemológico, as situações permitem verificar como o aluno reelabora constantemente os significados, quais as contradições presentes entre uma situação qualquer e a concepção de aluno, etc... (p.89).

O conceito de situação mencionado por Vergnaud (1990) relaciona-se à tarefa cognitiva e abrange duas idéias principais, a de variedade e a da história. A idéia de variedade implica a existência de várias situações dentro de um mesmo campo conceitual e a de história relaciona-se aos conhecimentos elaborados mediante situações enfrentadas e dominadas, que poderão dar sentido aos conceitos e procedimentos.

Em síntese, um conceito envolve muitas situações, muitos invariantes e muitas simbolizações possíveis, sendo que são as primeiras que dão sentido ao conceito. É mediante essa estreita relação entre o conceito e as situações que Vergnaud (1985) justifica a necessidade de estudar campos conceituais, haja vista que existe uma reciprocidade muito grande entre eles, pois um conceito está relacionado a uma variedade de situações e uma situação está relacionada a muitos conceitos. Assim é o caso da adição e da subtração, que formam o campo conceitual diferente do da multiplicação e divisão, tendo em vista as relações estabelecidas entre os invariantes operatórios e as situações a que se referem.

Dessa forma, o campo conceitual das estruturas aditivas, é entendido como "o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações, e também como o conjunto dos conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (VERGNAUD, 1990, p.9). Já o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve situações que necessitam da multiplicação, da divisão ou da combinação entre elas. Vergnaud (1982) reconhece que, embora as estruturas multiplicativas não independam das estruturas aditivas, elas compõem um campo específico que é o da proporcionalidade. Já o campo das estruturas aditivas englobam situações de composição e decomposição.

Em relação às estruturas aditivas, identifica seis relações de base, a partir das quais é possível engendrar todos os problemas de adição e subtração. Em virtude dos muitos exemplos que tem apresentado, Vergnaud (Ibid.) considera este campo como um bom exemplo de campo conceitual.

1-Campo Conceitual das Estruturas Aditivas

As seis relações de base elencadas por Vergnaud (1997) foram obtidas a partir da combinação de dois conceitos: o conceito de estado, representado por uma quantificação numérica e o conceito de relação, entendido como toda relação de natureza numérica entre dois estados.

A representação gráfica dessas idéias é feita pela Teoria dos Campos Conceituais da seguinte maneira: todo estado é representado por um quadrado, no qual é colocado o número associado ao que é conhecido.

Por exemplo, 3 bolinhas: $\boxed{3}$

Assim, quando um estado corresponde a uma pergunta dentro do problema é colocado um ponto de interrogação dentro do quadrado: $\boxed{?}$

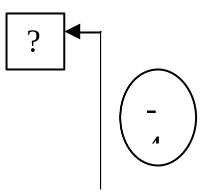
As relações, por sua vez, são representadas por um círculo, no interior do qual é colocada uma informação numérica acerca da transformação a ser efetuada. O círculo é acompanhado de uma flecha, que simboliza a ligação entre o estado inicial e o estado final quando se trata de transformações, e entre o estado referente e o estado referido quando se trata de comparações.

Em se tratando das transformações, tomemos o seguinte exemplo:

Pedro tinha 6 bolinhas. Ele jogou uma partida com Vitor e ganhou 5. Quantas bolinhas ele tem agora?

O exemplo a seguir está relacionado às comparações:

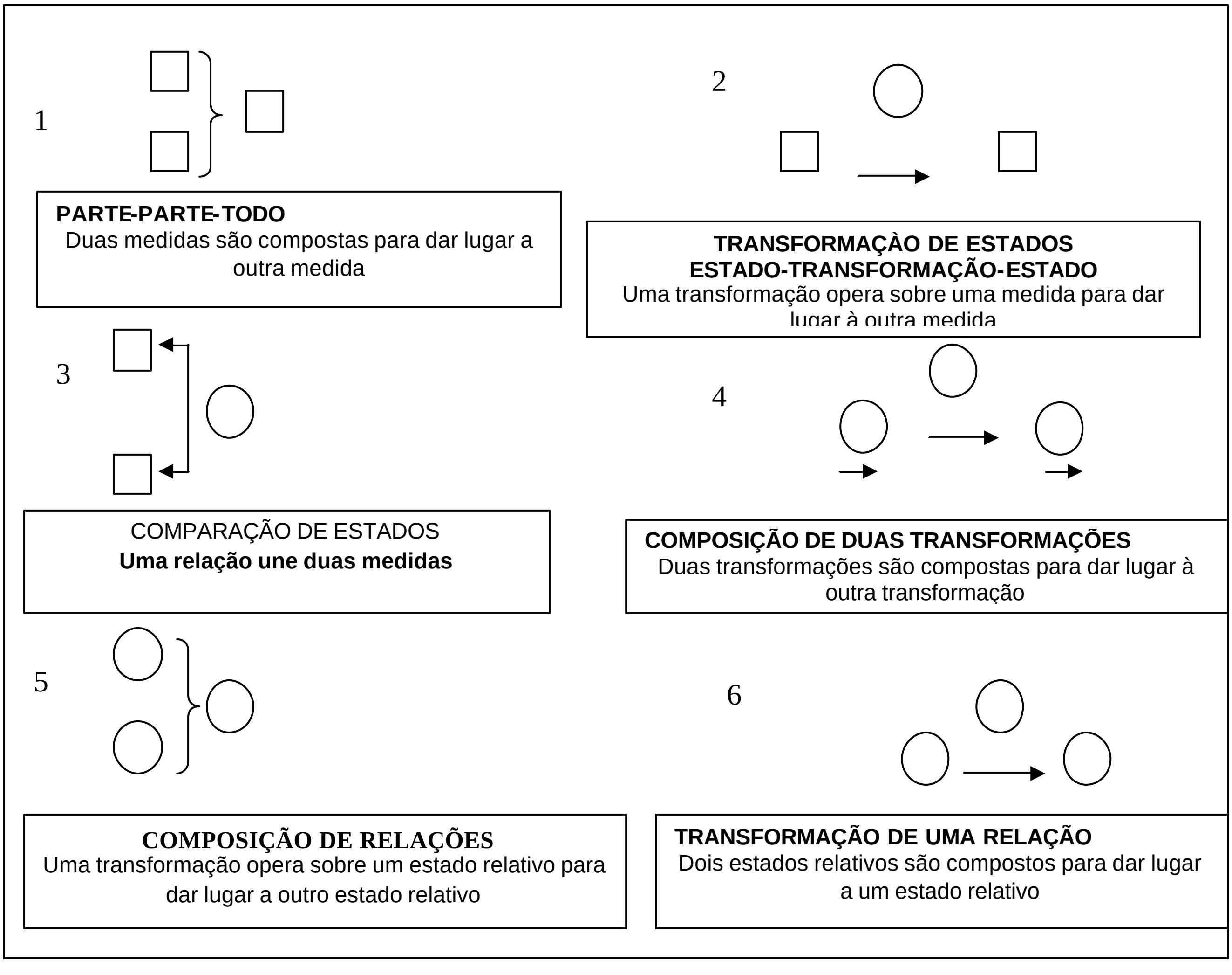
Paulo tem 4 anos a menos que sua irmã Elisa. Ele tem 5 anos. Qual a idade de sua irmã?



5

Para o Vergnaud (1990), toda situação pode ser interpretada como uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, que correspondem ao número de questões possíveis. Considerando o campo conceitual das estruturas aditivas podemos obter as seguintes relações:

QUADRO 1- RELAÇÕES ADITIVAS DE BASE (VERGNAUD et al, 1997)



Vergnaud (1990) afirma que essa classificação não brotou do cérebro de um matemático, mas é o resultado de considerações matemáticas e psicológicas, visto que se não fosse assim negligenciaríamos distinções importantes para a didática.

O autor pondera que, do ponto de vista estrutural, desconsiderando os valores numéricos e o domínio da experiência, é possível engendrar quatorze classes distintas de problemas somente com as três primeiras relações (VERGNAUD, 1991). Afirma, também, que é mediante problemas referentes a essas relações que crianças das séries iniciais atribuem um valor funcional ao conceito de número. Em se tratando das outras três relações o autor destaca que é possível compor 7 classes distintas de problemas.

Vergnaud (Ibid.) aponta várias razões que podem contribuir para tornar um problema difícil. Vejamos o seguinte problema:

Maria acaba de ganhar 7 reais por ter feito as compras para uma vizinha. Ela tem agora 15 reais. Quanto ela tinha antes de fazer as compras?

Esse problema pode ser difícil devido a vários fatores:

> - dificuldade conceitual da inversão da transformação direta:
> - $F=T(I) \Rightarrow I=T-1(F)$
> - obstáculo da concepção primitiva da adição como ganho, e a subtração como perda: não se pode subtrair 7, uma vez que trata-se de um ganho.
> - impossibilidade prática de contar à partir de um estado inicial desconhecido, e a necessidade de transformar o problema para lhe dar uma solução através da contagem;
> - dificuldade de contar 7 passos para trás à partir de 15;
> - dificuldade de contar o número de passos indo de 7 à 15. (VERGNAUD, 1991, p.5)

Vergnaud (1982) sugere que além dessas razões, a dificuldade está em representar o problema, pois em geral os alunos do ensino fundamental tendem a representar o procedimento. Procedimento muitas vezes canônicos ou estandardizados que não correspondem aos processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas (FRANCHI, 1999). Resta-nos saber o que fazer para que o aluno represente o problema. “A nosso ver, uma condição indispensável é que o aluno se aproprie da situação. Para essa apropriação é essencial que ele possa utilizar seus próprios procedimentos a partir da representação que ele se faz situação” (p.189).

Confirmando essa afirmação, Carraher e Schliemann (1983) descrevem um estudo realizado com cinqüenta crianças, de sete a treze anos, de escolas públicas e particulares. Nesse estudo, o uso das estratégias ou algoritmos ensinados pela escola ocorreu em apenas 34% das crianças para as operações de adição e 24% para as de subtração. As crianças preferiram utilizar estratégias próprias a usarem procedimentos escolares, que como verificado, são os que mais freqüentemente levam a erros.

O fato de o aluno colocar novos procedimentos de raciocínio em funcionamento em face de uma nova situação, diferentemente de apenas repetir modelos previamente determinados, como é o caso dos algoritmos, determina um estado de apreendência, conforme termo utilizado por Assmann (apud PAIS, 2001). Esse estado é marcado pela capacidade de coordenar e adaptar conhecimentos anteriores a uma nova situação de forma dinâmica e com certa continuidade.

Podemos afirmar que é dessa maneira que uma atividade didática pode cumprir a finalidade de aprendizagem de matemática, visto que o aluno é desafiado a ampliar seu universo de conhecimentos sobre esta disciplina quando busca em esquemas anteriores a construção de novos esquemas através de uma gama de situações (GROSSI, s/d).

Essas constatações nos levam a justificar mais uma vez a necessidade de estudar os campos conceituais, tendo em vista que as situações permitem a produção de uma classificação baseada na análise de tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada uma delas, como é o caso do campo conceitual das estruturas aditivas (VERGNAUD, 1990). A caracterização desse campo poderá ser observada na explanação de cada uma das seis relações de base que o compõem.

1.1- As seis relações de base do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas

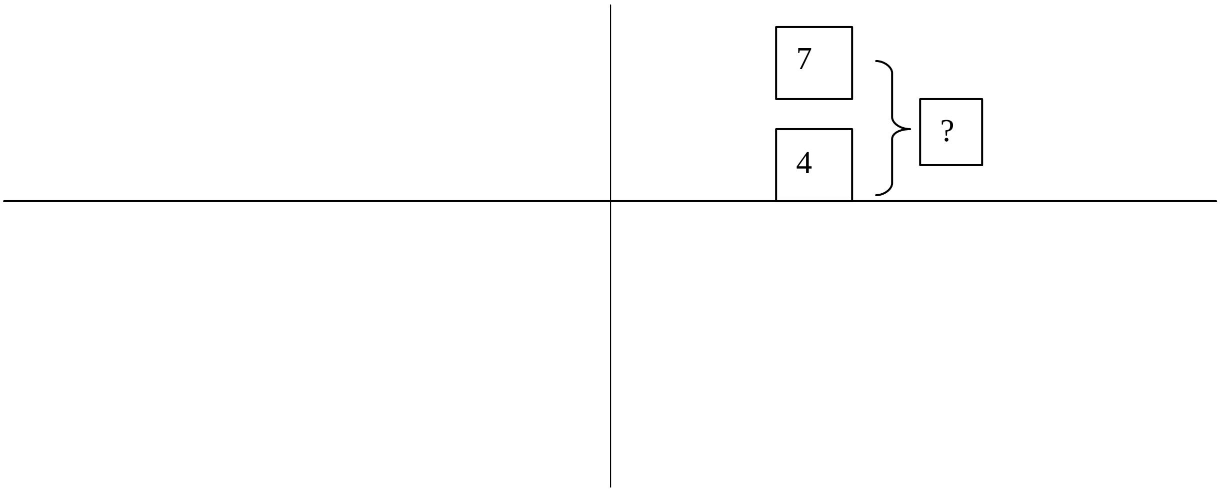
1.1.1 A relação parte-parte-todo

A relação parte-parte-todo não oferece mais que duas possibilidades de cálculos relacionais, em correspondência termo a termo com os dois cálculos numéricos de adição e de subtração. Essa relação parte-parte-todo não permite por si só, a despeito de sua importância conceitual, compreender todas as possíveis dificuldades de raciocínio encontradas pelos alunos.

Essa relação permite engendrar duas categorias de problemas:

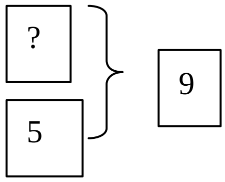
1. busca do todo conhecendo-se as duas partes;
2. busca de uma parte, conhecendo-se o todo e a outra parte.

QUADRO 2- PARTE-PARTE-TODO
(adaptado de VERGNAUD et al 1997, p.12)



1. Nádia tem 7 bolinhas de ferro e 4 de aço. Quantas bolinhas ela tem?

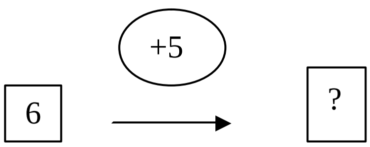
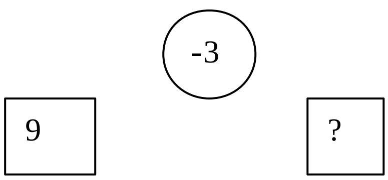
2. Karen convidou 9 crianças para seu aniversário. Cinco são meninos. Quantos são as meninas?



1.1.2 A relação transformação de estados

Corresponde à transformação de um estado inicial em um estado final. Essa transformação pode consistir em um aumento (ganho, brinde, produção, etc.) ou em uma diminuição (perda, roubo, consumação, etc.). Pode-se procurar o resultado final conhecendo o estado inicial e a transformação, a transformação conhecendo o estado inicial e o estado final, ou o estado inicial conhecendo a transformação e o estado final. Sabendo que a transformação pode ser positiva (aumento) ou negativa (diminuição), chegou-se a seis classes de problemas.

QUADRO 3 TRANSFORMAÇÃO DE ESTADOS
(adaptado de VERGNAUD et. Al 1997, p.12)

1. Pedro tinha 6 bolinhas. Ele jogou uma partida com Vitor e ganhou 5. Quantas ele tem agora? Busca-se o estado final quando a transformação é positiva.	 +5 6 ?
2. Pedro tinha 9 bolinhas. Ele jogou uma partida com Estevão e perdeu 3. Quantas ele tem agora? Busca-se o estado final quando a transformação é negativa.	 -3 9 ?

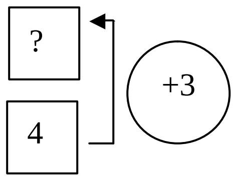
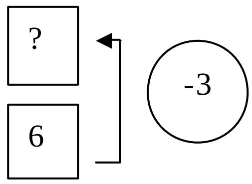
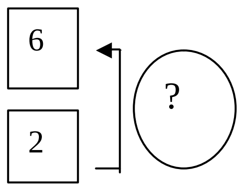
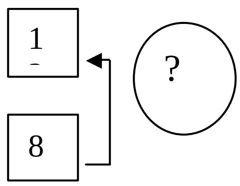
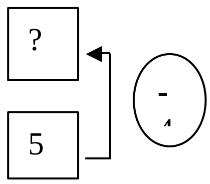
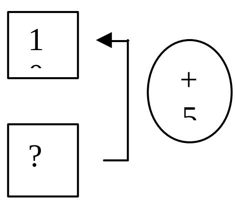
3. Léo tinha 7 bolinhas. Depois de jogar uma partida com Tiago, ele tem agora 11 bolinhas. O que aconteceu durante a partida? Léo ganhou ou perdeu bolinhas? Quantas? Busca da transformação positiva.	$\boxed{7} \xrightarrow{?} \boxed{11}$
4. Olívio tinha 16 bolinhas. Depois de jogar uma partida com Cláudio, ele tem agora 12. O que aconteceu durante a partida? Olívio ganhou ou perdeu bolinhas? Quantas? Busca da transformação negativa.	$\boxed{16} \xrightarrow{?} \boxed{12}$
5. Carlos ganhou 3 bolinhas num jogo com José. Ele tem agora 10 bolinhas. Quantas bolinhas ele tinha antes de jogar? Busca-se o estado inicial quando a transformação é positiva.	$\boxed{?} \xrightarrow{+3} \boxed{10}$
6. Jorge perdeu 5 bolinhas num jogo com Silas. Ele tem agora 3. Quantas bolinhas ele tinha antes de jogar? Busca-se o estado inicial quando a transformação é negativa.	$\boxed{?} \xrightarrow{-5} \boxed{3}$

1.1.3 A relação comparação de estados (comparação quantificada de um referido a um referente)

Referido designa a quantidade comparada; referente a quantidade com relação a qual se efetua a comparação.

A comparação entre um referente e um referido por uma relação de ordem quantificada dá lugar a seis categorias de problemas.

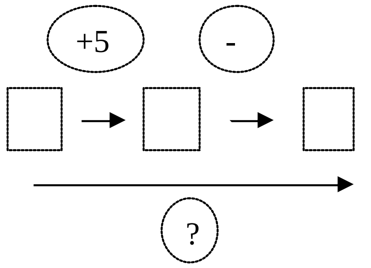
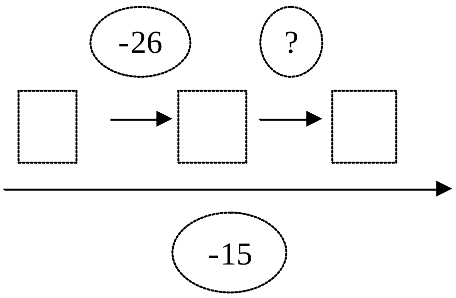
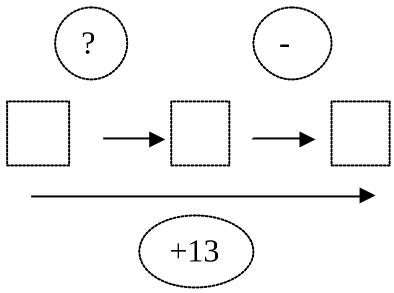
QUADRO 4- COMPARAÇÃO DE ESTADOS (adaptado de VERGNAUD et al 1997, p.12)

1. Ana tem três bonecas a mais que Carla. Carla tem quatro. Quantas bonecas tem Ana? Busca-se o referido. O referido é maior que o referente.	
2. Mary tem 3 bonecas a menos que Sara. Sara tem 6. Quantas bonecas tem Mary? Busca-se o referido. O referido é menor que o referente.	
3. Suzi tem 6 anos e Karen tem 2. Quantos anos tem Karen a menos que Suzi? Busca-se a relação. O referido é menor que o referente.	
4. Roberta tem 12 anos e Julia tem 8. Quantos Anos tem Roberta a mais que Julia? Busca-se a relação. O referido é maior que o referente.	
5. Paulo tem quatro anos a menos que sua irmã Elisa. Ele tem 5 anos. Qual a idade de sua irmã? Busca do referente. O referente é maior que o referido.	
6. Pedro tem 5 anos a mais que sua irmã Flora. Ele tem 10 anos. Qual a idade de Flora? Busca do referente. O referente é menor que o referido.	

1.1.4 A relação composição de duas transformações

Ocorre quando duas transformações se sucedem (dois aumentos, duas diminuições, um aumento e uma diminuição, ou o inverso) para dar lugar à outra transformação. As informações do enunciado são pertinentes somente às transformações, não sendo necessário conhecer algum dos estados inicial, intermediário ou final.

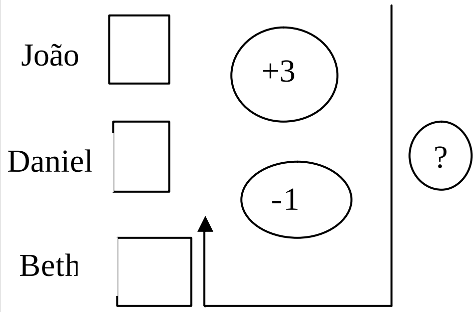
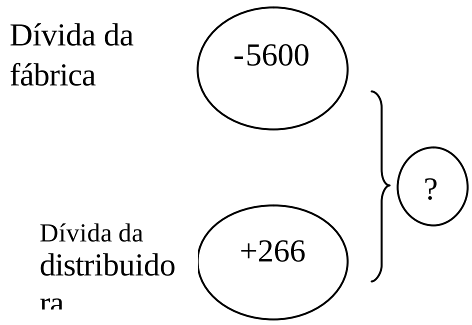
QUADRO 5- COMPOSIÇÃO DE DUAS TRANSFORMAÇÕES (adaptado de VERGNAUD et al 1997, p.14)

1. Elton jogou duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, ganhou 5 e na segunda perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas partidas, ele ganhou ou perdeu? Quantas bolinhas? Busca-se a transformação composta.	
2. Helen pagou 26 reais num presente de aniversário para seu irmão. Em seguida, ela recebeu uma gorjeta por ter feito um favor à sua vizinha. Ao recontar seu dinheiro percebeu que tinha 15 reais a menos do que tinha antes de comprar o presente. Quanto ela recebeu de sua vizinha? Busca-se a segunda transformação.	
3. Hector jogou partidas de bolinhas de gude de manhã e antes do meio dia. À tarde, ele perdeu 6 bolinhas. No final do dia, ele percebeu que havia ganho 13 bolinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas? Busca-se a primeira transformação	

1.1.5 A relação composição de duas relações

Da mesma maneira, pode-se compor ou decompor relações de comparação entre três indivíduos ou três objetos ou eventualmente relações de débito e de crédito.

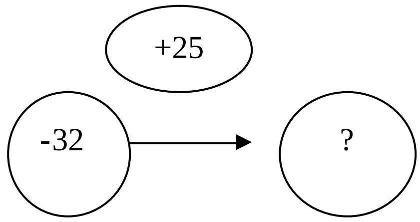
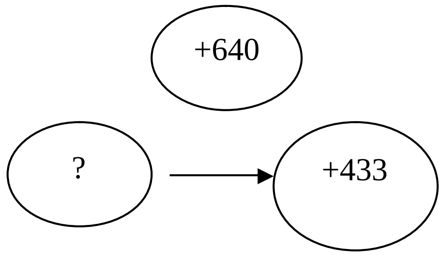
QUADRO 6- COMPOSIÇÃO DE DUAS RELAÇÕES
(adaptado de VERGNAUD et a1997, p.15)

1. João tem três anos a mais que Daniel, e Daniel um ano a menos que sua prima Beth. Quantos anos João é mais velho que Beth?	
2. Uma fábrica deve 5600 reais à uma distribuidora. Mas a distribuidora deve também 266 reais à fábrica por uma mercadoria defeituosa entregue. Qual é a nova situação?	

1.1.6 A transformação de uma relação

Pode-se enfim encontrar situações dentro das quais uma transformação (aumento ou diminuição) opera sobre uma relação

QUADRO 7- TRANSFORMAÇÃO DE UMA RELAÇÃO
(adaptado de VERGNAUD et a1997, p.15)

1. André deve 32 reais a Guilherme. Guilherme comprou para André um ingresso no valor de 25 reais. Qual a nova situação entre André e Guilherme?	
2. Mauro verificou que em sua conta bancária havia um crédito de 433 reais. Ele tinha feito um depósito de 640 reais. Qual era a nova situação de sua conta antes de fazer o depósito?	

Sabemos que os problemas pertencentes as classes 5 e 6 envolvem conceitos mais complexos que são introduzidos à partir da 5ª série do Ensino Fundamental. Dessa forma, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2000), recomendam que se explore nas séries iniciais do Ensino Fundamental, somente situações pertencentes aos quatro primeiros grupos, haja vista que as duas últimas- composição de relações e transformação de uma relação- exigem uma elaboração mental mais apurada.

No primeiro grupo: estão as situações associadas à idéia de combinar dois estados para obter um terceiro, freqüentemente designadas pela ação de juntar.

Exemplo:

Em uma cesta há 13 laranjas e 15 bananas. Quantas frutas há nessa cesta?

Dessa mesma situação é possível formular outras duas, mudando-se a pergunta. Essas situações são identificadas pelas ações de tirar e separar.

No segundo grupo, estão as situações ligadas à idéia de transformação. Essas situações resultam em uma alteração de um estado inicial, positiva ou negativa.

Exemplo:

Eduardo tinha 16 carrinhos. Ele ganhou mais 12 carrinhos de aniversário. Quantos carrinhos ele tem agora? (Esta situação envolve uma transformação positiva)

Veja esta situação, agora envolvendo uma transformação negativa:

Eduardo tinha 16 carrinhos Ele perdeu 12 na fazenda de seu avô. Quantos carrinhos ele tema agora?

Num terceiro grupo, estão as situações ligadas à idéia de comparação.

Exemplo:

No final de um jogo, Flávio e Pedro conferiram suas figurinhas. Flávio tinha 18 e Pedro tinha 10 a mais que Flávio. Quantas eram as figurinhas de Pedro?

Num quarto grupo, estão as situações que supõem a compreensão de mais de uma transformação, tanto positiva quanto negativa.

Exemplo:

No início de uma partida, Marcos tinha uma certa quantia de pontos. No decorrer do jogo ele ganhou mais 15 pontos e, em seguida, perdeu 6 pontos. O que aconteceu com seus pontos no final do jogo?

Conforme vimos anteriormente, as quatro relações de base descritas dão origem a um número variado de situações com diferentes níveis de complexidade. É importante ressaltar que "no início da aprendizagem escolar os alunos ainda não dispõem de conhecimentos e competências para resolver todas elas, necessitando de uma ampla experiência com situações-problema que os leve a desenvolver raciocínios mais complexos por meio de tentativas, explorações e reflexões” (BRASIL, 2000, p.108).

É por esse motivo que nesse trabalho estaremos priorizando somente as 4 primeiras relações de base do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas.

CAPÍTULO II

PERSPECTIVAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas na matemática tem ocupado um lugar de destaque. Gazire (1988,) registra que "as mais antigas matemáticas escritas que vêm à imaginação são coleções de problemas. Os conhecimentos da matemática egípcia e babilônica estão totalmente baseadas na análise de problemas ao invés de teorias e provas de teoremas" (p.15).

Gazire (Ibid.) apresenta três perspectivas para a resolução de problemas que permeiam a prática educativa: como um novo conteúdo, como uma forma de aplicar o conteúdo e como um meio de ensinar matemática.

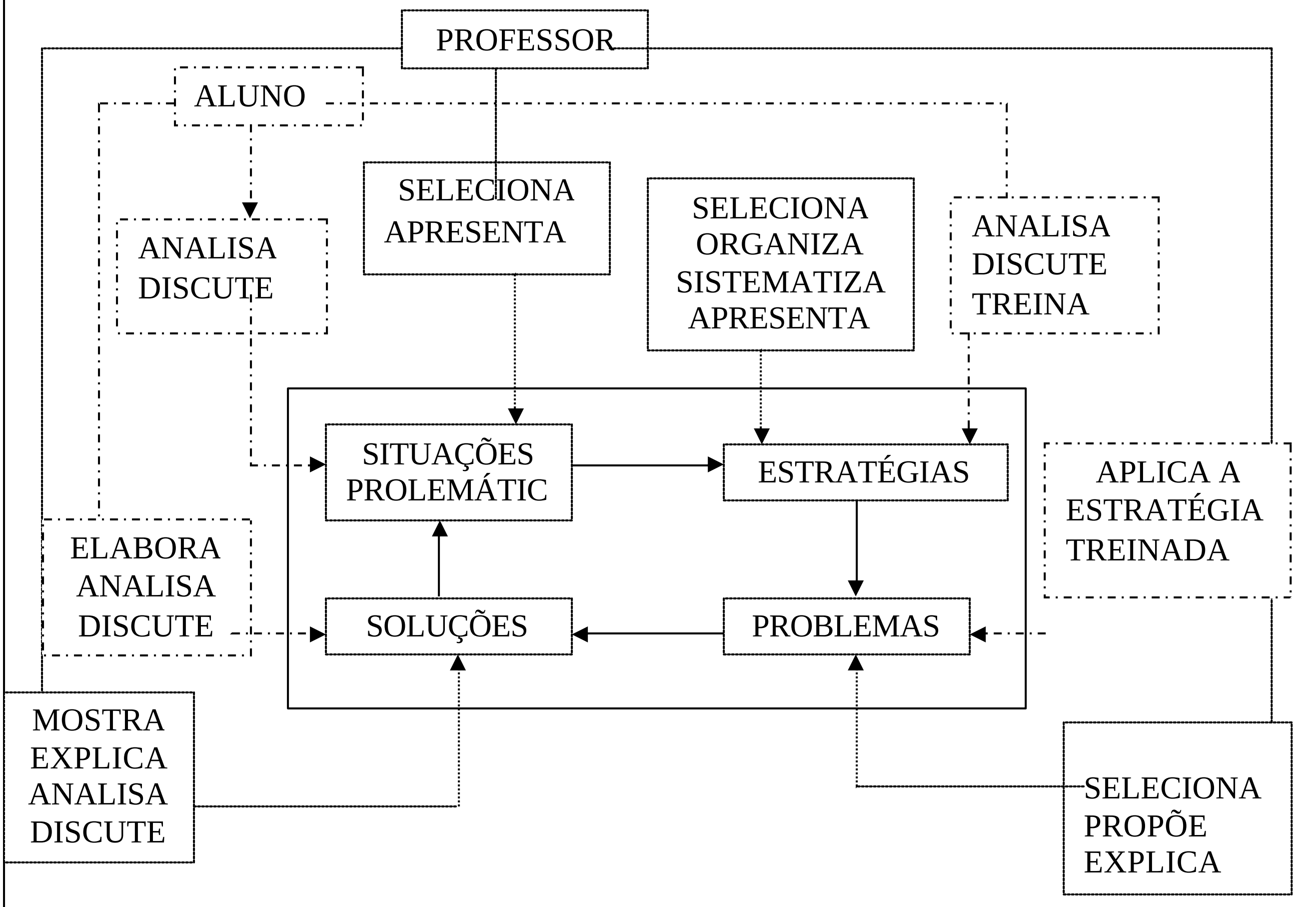
A resolução de problemas baseada na perspectiva de um novo conteúdo é decorrente de milênios de atividades. Essa perspectiva busca levar o aluno ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de resolução de problemas.

> O primeiro passo é a apresentação de situações problemáticas. Em seguida, o aluno toma conhecimento, analisa e discute estratégias que podem ser utilizadas para solucioná-las. Finalmente, o aluno é colocado diante de uma série de problemas onde são aplicadas as estratégias estudadas. (GAZIRE, 1988, p.90)

Cabe ressaltar que nesse enfoque o professor é quem comanda todo o trabalho, selecionando, organizando, sistematizando, apresentando e explicando estratégias para a solução dos problemas apresentados. A partir daí, propõe ao aluno a resolução de problemas na qual as estratégias ensinadas deverão ser aplicadas. Nesse momento, o professor faz algumas intervenções para que o aluno obtenha as soluções desejadas, mostrando, explicando, analisando e corrigindo. Compete ao aluno analisar e discutir os problemas apresentados. Treinar as estratégias que o professor explicou e aplicá-las aos problemas.

Podemos sintetizar esta perspectiva no seguinte quadro:

QUADRO 8-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UM NOVO CONTEÚDO
(adaptado de GAZIRE, 1988)



Uma outra perspectiva apresentada por Gazire (1988) aborda a resolução de problemas como aplicação de conteúdos. Essa perspectiva apregoa que um conteúdo pode ser melhor aprendido quando ele é aplicado. Para tanto, o aluno precisa conhecer e dominar as técnicas e algoritmos adequados para obtenção das soluções aos problemas propostos, depois da devida explicação de um determinado conteúdo.

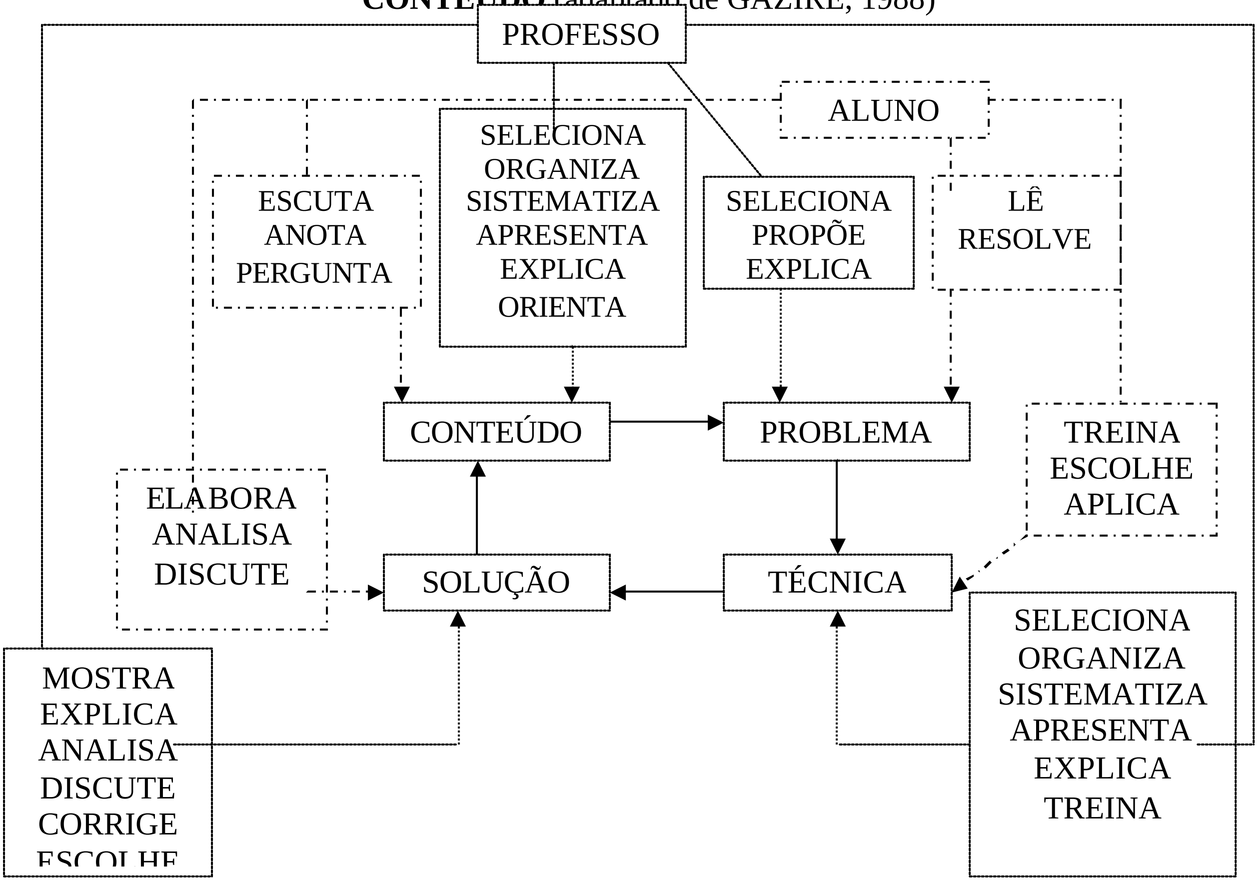
Diante disso, o professor tem a função de selecionar, organizar, sistematizar, apresentar e explicar o conteúdo que deve ser aprendido pelo aluno.

> O aluno só resolve problemas se esse conteúdo lhe for apresentado e organizado com antecedência. O professor identifica e seleciona técnicas e algoritmos para a Resolução de Problemas que envolvam o conteúdo apresentado e prepara o aluno para utilizá-los. O conteúdo é caracterizado por particularidades, dificuldades e passos para melhor identificação do algoritmo ou técnica que deve ser aplicada na solução de problemas que envolvam tal conteúdo. (GAZIRE, 1988, p.106)

Após ter aprendido o conteúdo, o aluno precisa treinar as técnicas ensinadas e aplicá-las nos problemas propostos pelo professor. Os problemas são apresentados ao aluno obedecendo ao grau de dificuldade, do mais fácil para o mais complexo.

Essa perspectiva pode ser sintetizada no quadro a seguir:

QUADRO 9 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FORMA DE APLICAR O CONTEÚDO (adaptado de GAZIRE, 1988)



A última perspectiva analisada por Gazire (1988) é a que apresenta a resolução de problemas como um meio de ensinar matemática.

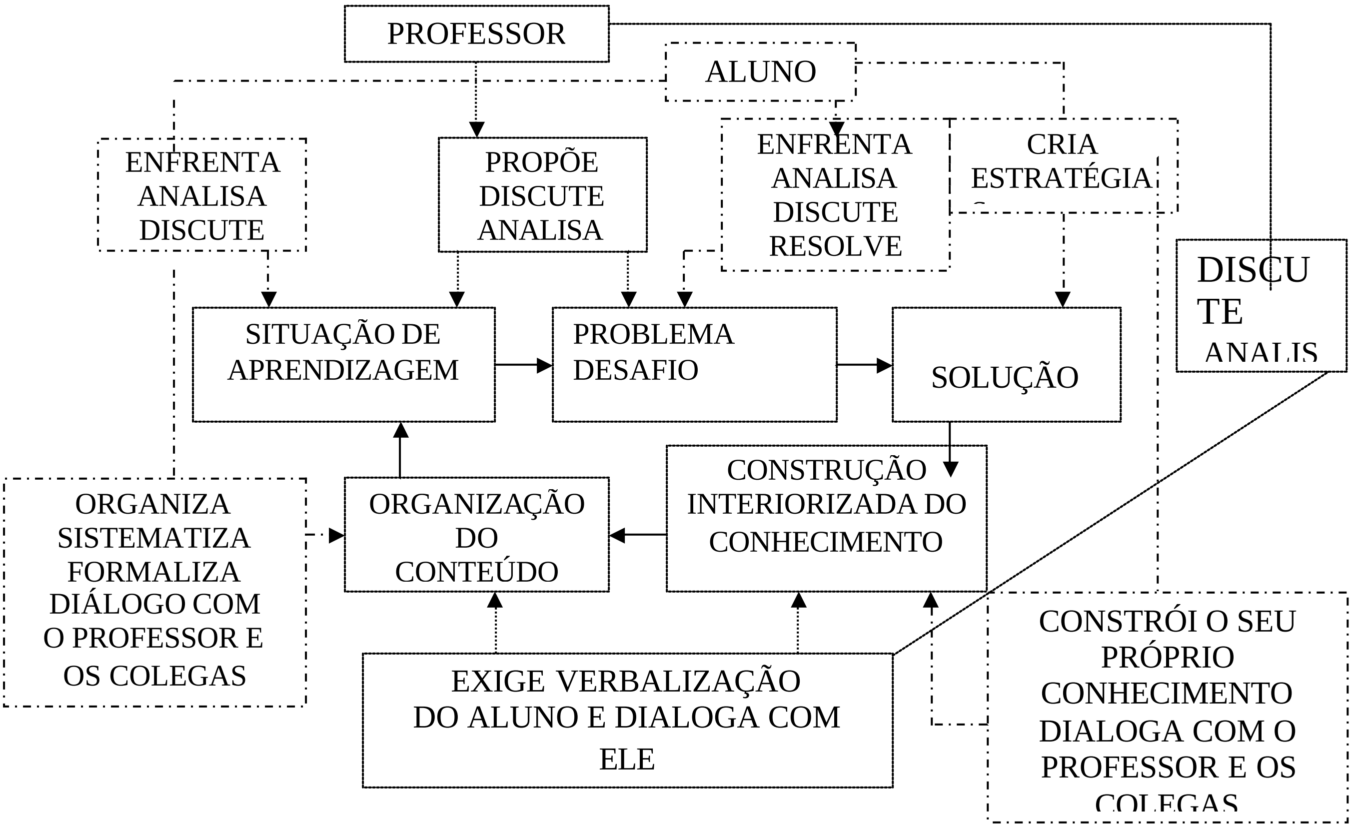
Segundo essa abordagem "se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido" (Ibid., p.124). E para que isso ocorra, os problemas são apresentados ao aluno para que resolva utilizando seus conhecimentos e suas experiências, por meio de estratégias próprias. Dessa forma, o aluno transforma esses conhecimentos em conhecimento matemático.

A matemática não é exposta nem explicada ao aluno, mas buscada por esse no momento de solucionar os problemas propostos, sob a orientação e acompanhamento do professor que analisa as soluções encontradas pelo aluno, encorajando-o a buscar soluções alternativas e ajudando-o a identificar as soluções mais adequadas para o problema proposto. O dialogo permeia a relação professor- aluno de maneira que o aprendiz exponha seus processos e seus resultados.

Nesse enfoque dado à resolução de problemas, a aquisição do conhecimento é uma construção baseada na ação do aluno, que ganha autonomia para decidir como atuar diante dos mesmos, organizando e sistematizando o conteúdo envolvido em cada um deles. Ao professor compete orientar o trabalho do aluno, propondo problemas adequados a sua idade cognitiva e que permita o uso e a análise dos conhecimentos e experiências que possuir.

A síntese desta perspectiva pode ser visualizada no quadro abaixo:

QUADRO 10 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FORMA DE ENSINAR MATEMÁTICA
(adaptado de GAZIRE, 1988)



Para Gazire (1988) o trabalho com a Resolução de Problemas teria perspectivas distintas em cada nível de ensino. No ensino fundamental deveria ser um meio de aprender Matemática. “Dessa forma, seria garantido para a criança, a transformação de suas experiências em conhecimento matemático; ao mesmo tempo, em termos de aprendizagem, a criança seria resguardada em sua autonomia” (p.153).

Já no ensino médio, o enfoque dado à Resolução de Problemas estaria direcionado para a aplicação do conteúdo e no ensino superior deveria ser realizada como um conteúdo, “fazendo com que o aluno se torne um resolvedor de problemas ao complementar todas as suas potencialidades com estratégias já comprovadas” (GAZIRE, 1988, p.153).

A proposta de Gazire (1988) é bastante discutível porque ela separa os elementos do processo de aprendizagem, estabelecendo para cada nível de ensino uma das perspectivas abordadas na resolução de problemas.

No entanto, o processo de aprendizagem deve se diferenciar não pelos procedimentos, mas pela profundidade das questões matemáticas envolvidas. Nesse sentido, é possível trabalhar com a resolução de problemas como um novo conteúdo, como forma de aplicar o conteúdo e como um meio de ensinar a matemática, independente do nível de ensino.

Onuchic (1999) enriquece a visão apresentada por Gazire (1988) ao analisar os movimentos de reforma do ensino de matemática no século XX, identificando a trajetória desse ensino até a introdução dessa prática educativa como metodologia. Tal análise.

O ensino da matemática no início do século XX, segundo Onuchic (1999), estava voltado para a repetição, sendo a memorização considerada um aspecto importante. O aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia e treinava em casa os exercícios feitos em sala de aula. O conhecimento do aluno era medido através da aplicação de testes em que ele deveria repetir, mesmo sem compreensão, tudo que o professor havia feito.

Descartando esta forma de trabalho buscou-se anos depois, desenvolver uma matemática com compreensão, na qual as tabuadas e seus treinos eram condenados. O ensino da matemática no Brasil e no mundo foi influenciado por um movimento de renovação denominado como Matemática Moderna.

> Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores de sala de aula, deixava de lado as anteriores. Ela apresentava uma Matemática estruturada, apoiada em estrutura lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações

> Matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p.214)

Nessa época começou-se a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática. Entretanto, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início a partir da década de 70, muito embora trabalhos como os de Polya, um dos divulgadores dessa metodologia, datem de 1944. Para esse autor resolver um problema é

> [...] encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. [...] é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.
> Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem.
> [...] Podemos caracterizar o homem como o "animal que resolve problemas"; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. (1997, p.1-2)

Onuchic e Allevato (2004) enfatizam que as discussões no campo da Educação Matemática, no fim dos anos 70, apontaram para a importância de se adequar o ensino às novas tendências que possivelmente, trariam melhores formas de aprender e ensinar Matemática.

Segundo Gomes (1998), nos Estados Unidos, a resolução de problemas foi evidenciada pelo Conselho Nacional de Supervisores de Matemática (NCTM - National Council of Teachers of Mathematics[6]), ao sugerir uma série de recomendações para o progresso da Matemática escolar, tendo em vista as habilidades básicas que o aluno do século XXI necessita desenvolver e que a escola deverá enfatizar.

[6] O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos. Conta com mais de 12 500 associados e é a principal organização para professores de Matemática desde a escola pré-primária à escola secundária nos Estados Unidos.

Segundo Onuchic e Allevato (2004) as mudanças sugeridas pelo NCTM em quase todos os aspectos de ensino e aprendizagem de Matemática influenciaram, no Brasil, a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2000) ao colocarmos a resolução de problemas como foco no ensino da matemática teríamos uma proposta norteada pelos seguintes princípios resumidamente:

> - ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema...
> - que o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório...
> - aproximações sucessivas ao conceito são construídas para rsolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros...
> - o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas...
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (p.43).

Todos esses princípios também são ressaltados por Onuchic (1999), quando descreve um projeto desenvolvido com professores no final de década de 90, intitulado "Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas". Nesse trabalho focalizou o conhecimento matemático dos professores e as crenças que traziam de matemática e de ensino-aprendizagem, tendo ficado evidente para todos os professores que "um ensino apoiado inteiramente em técnicas operatórias, repetitivas e sem significado não deveria ser o caminho escolhido" (p.215).

A autora, ao defender a resolução de problemas como metodologia de ensino afirma que "o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas" (Ibid., p.211).

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2000, p.44) declaram que para resolver um problema é preciso que o aluno

> - elabore um ou vários procedimentos de resolução(como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
> - compare seus resultados com os de outros alunos;
> - valide seus procedimentos.

Como se pode observar, várias habilidades deverão ser disponibilizadas ao resolver um problema e não simplesmente a capacidade de armazenar informações e aplicá-las mecanicamente, visto que um problema é "qualquer situação que pede uma solução, trazendo aos sujeitos a necessidade de descobrir relações e explorá-las, de elaborar hipóteses e verificá-las" (MORO,1998, p.7).

Essas idéias vão ao encontro do que Charnay (1996) afirma quando advoga que é justamente o problema que dá sentido aos conceitos ou teorias, o que reforça a necessidade de um ensino baseado na resolução de problemas.

A importância dada à resolução de problema para o ensino está também refletida nos fundamentos do SAEB -Sistema de Avaliação da Educação Básica-(BRASIL, 2001) quando atribui a esta metodologia a possibilidade de

> desenvolvimento de capacidades como observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processo, além de estimular formas de raciocínio como intuição, indução, dedução e estimativa. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução (p.47-8).

Para Echeverría (1998) o uso da metodologia de resolução de problemas tem que levar em conta que, para compreensão e resolução dos mesmos, é indispensável conhecer o conteúdo das tarefas, a sua relação com os conhecimentos armazenados pelos alunos, o contexto no qual ocorre, a forma e a linguagem que as expressões assumem.

Ponte e Serrazina (s/d) afirmam que a "resolução de um problema constitui um processo de elevado nível de complexidade, que envolve os processos mais simples de representar e relacionar" (p.52). Representar envolve compreender e usar símbolos, convenções, gráficos e relacionar implica buscar regularidade e generalização entre os conceitos.

Além dos aspectos destacados, representar, segundo Damm (1995), é um instrumento transicional para a compreensão dos enunciados que permite selecionar as informações pertinentes e organizá-las, de tal modo que aconteça a conversão do texto no tratamento aditivo.

Apesar das pesquisas mostrarem que a resolução de problemas é um processo, sujeito à elaboração, "os alunos estão acostumados a encontrar a matemática na forma acabada" (HOUSE, 1997, p.218). Esta imagem deturpada é propagada, em muitos casos, pelo próprio professor, que acredita que está ensinando seu aluno a resolver problemas, mostrando sua forma de resolução na lousa. Desconhece que a sua forma não pode ser aprendida através da imitação, ficando o desempenho aprendido distante daquele almejado, que seria o de resolver problemas daquele tipo (FIGUEIREDO e GALVÃO, 1999).

Cabe ressaltar que a ajuda por parte do professor no momento da resolução se fará necessária, dependendo do grau de reflexão exigido pelo problema, principalmente quando esse constitui uma novidade. Além disso, o professor deve ter clareza que a solução de problemas é aprendida resolvendo-se problemas. E como preconizam Castro, Rico e Castro (1995) "a habilidade para resolver problemas não se pode ensinar, porém pode desenvolver-se resolvendo problemas" (p.21).

Entretanto, não podemos considerar tal prática como aleatória. Primeiramente, é necessário “reconhecer a diversidade de estruturas de problemas, analisar as operações envolvidas e as operações de pensamento necessárias para resolver cada classe de problemas” (VERGNAUD, 1982, p.6). Isto se deve ao fato de que para cada classe de problemas as dificuldades enfrentadas pelos alunos variam e os procedimentos também. Além disso, o esqueleto e o envoltório dos problemas apresentam configurações diferenciadas para cada classe de problemas.

De acordo com Brito (2001) um problema é constituído por um lado de uma estrutura ou esqueleto, ou seja os conceitos envolvidos e por outro, de um envoltório, que representa o contexto ao qual os conceitos estão atrelados.

> Somente após a compreensão do enunciado (daquilo que é solicitado pelo problema) o estudante consegue perceber a estrutura matemática que está subjacente ao envoltório. Assim, a habilidade verbal é essencial para a compreensão do envoltório do problema, enquanto a habilidade matemática é necessária para a percepção de espaço do problema, quais algoritmos são exigidos e quais resultados são admitidos. (Ibid., p.8)

É preciso, portanto, repensar a prática da resolução de problemas baseada em uma mera coletânea de problemas sem critérios bem definidos. Minimamente é preciso responder a questões como: o problema pertence a qual relação de base das estruturas aditivas? Que procedimentos são utilizados para sua resolução? Qual a diferença deste para aquele que também pertence à mesma relação? Quais as diferentes formas de representar o problema? O que gera a dificuldade do aluno: o cpntexto ou a estrutura do problema?

Como pudemos verificar, ensinar a resolver problemas é uma tarefa árdua, que extrapola o ensino específico de conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. É uma atividade complexa que envolve uma série de processos de pensamento que necessitam ser desenvolvidos pelo aluno com o auxílio e incentivo do professor, tarefa que demanda um bom domínio das questões envolvidas no uso da resolução de problemas no ensino de matemática.

1- Problema ou exercício? O que faz a diferença?

Diniz (1991, p.29) sugere a que cada novo problema o aluno deve ser exposto a questões que o levem a refletir sobre a solução apresentada, sobre as estratégias possíveis e sobre os erros cometidos: "Por que esse problema foi resolvido assim? Há outros modos de se chegar a essa resposta? Qual é o melhor processo para se resolver esse problema? Que outras questões podem ser levantadas a partir do que é dado?" Questões como essas devem ser inicialmente suscitadas pelo professor até que o aluno consiga fazê-las sozinho.

É exatamente a reflexão que diferencia o problema do exercício. Pais (1999, p.29), complementa essa afirmação considerando que "a atitude intelectual do aluno, diante de um problema, deveria ser semelhante ao trabalho do matemático diante de sua pesquisa. Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação." Ao contrário, quando o aluno encontra uma solução direta e eficaz para um problema, sem necessidade de reflexão, pode-se dizer que o mesmo deixa de ser um desafio tornando-se um mero exercício.

Echeverría e Pozo (1998) concordam que, "embora esse exercício seja importante porque permite consolidar habilidades instrumentais básicas, não deve ser confundido com a solução de problemas que exige o uso de estratégias, a tomada de decisões sobre o processo de resolução que dever ser seguido, etc " (p.17).

Gazire (1988,) enfatiza que estar diante de um problema é estar diante de um desafio que o conduz a inventar e criar estratégias e para que isso ocorra o indivíduo precisa encarar uma situação como um problema. Isso só é possível quando:

> 1º. compreende a situação e não encontra uma solução óbvia imediata;
> 2º. reconhece que a situação exige uma ação;
> 3º. quer ou precisa agir sobre a situação; (p.10)

Allevato e Onuchic (2003) complementam afirmando que os alunos precisam ser desafiados a resolver um problema e necessitam desejar resolvê-lo. Salientam que um problema "deverá exigir que se busquem novas alternativas, novos recursos , novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será, para os alunos, um problema" (p.38)

É neste sentido que Brousseau (1996) emprega o termo devolução de um problema, entendida como atividade na qual o professor tem a função de comunicar o problema ao aluno e fazer com que esse problema se converta em seu, se sentindo o único responsável de resolvê-lo.

Muller (2002) traz uma diferenciação entre exercício e problema bastante pertinente e que corrobora com as afirmações apresentadas anteriormente. Segundo a autora, os

> (...) exercícios aparecem freqüentemente na forma enganadora de problemas de aplicação (...) nos quais há que aplicar regras, cujo resultado é o que realmente importa. E que, primeiro se ensina as regras, logo se aplicam aos problemas, não considerando o processo seguido para encontrar a solução nem se refere sobre os procedimentos aplicados e os que possam ser utilizados. Considerando outra perspectiva, a solução de problemas exige propor problemas sem atar-se a regras preestabelecidas, considerar que existem diferentes procedimentos, e não reduzir o problema à categoria de exercício (p.53).

De acordo com Lopes e Mansuti (1994) a prática de ensino nas escolas mostra que, embora existam algumas experiências que dedicam atenção às estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução os problemas, essas são utilizados, em sua maioria, “com a finalidade de verificar a aprendizagem e a aplicação de conceitos, algoritmos, propriedades e outros fatos da matemática” (p.35).

Acreditamos que em virtude do uso exclusivo da resolução de problemas, como forma de aplicar procedimentos adquiridos, após a explicação de um novo conceito, pode suscitar no aluno muitas dúvidas, sobretudo quando estes comparecem em outros momentos da aula, desvinculados do conceito introduzido anteriormente.

2. A resolução de problemas com estrutura aditiva: principais dificuldades

Em relação aos problemas de adição e subtração que professor já não ouviu de seus alunos perguntas sobre qual operação utilizar para resolvê-los. Vergnaud (1985) afirma que

> a competência que consiste em encontrar, sem errar, qual operação(adição, subtração, multiplicação, divisão), deve-se aplicar a determinados dados e em que ordem, para resolver qualquer problema de aritmética dita elementar, é uma competência heterogênea que se analisa através de um grande número de competências distintas cuja a construção “espontânea” ou a apropriação pelo aluno requer um período de tempo muito longo (p.5).

Além disso, perguntas como a mencionada anteriormente são decorrentes, por um lado, da prática pedagógica vigente, que se baseia na introdução de um conceito, seguida de problemas, aos quais regras e procedimentos devem ser aplicados, visando fixar o conteúdo para a realização de uma avaliação quantitativa. Por outro, um outro fator que pode explicar este tipo de pergunta, deve-se ao fato de que os professores lidam com estas operações como se fossem inversas, quando na verdade, tem sido demonstrado pelas pesquisas na área da Didática da Matemática que tais operações são componentes de uma mesma família, de um mesmo campo conceitual.

Algumas pesquisas apresentam dados que apontam possíveis soluções para minimizar as dificuldades dos alunos do ensino fundamental diante de problemas de adição e subtração, designadas em nosso estudo, como problemas de estruturas aditiva.

Lopes (2002) investigou as possíveis relações entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos. Em relação aos problemas aditivos os sujeitos tinham que resolvê-los de diferentes maneiras: via algoritmo/ resolução escrita 1, por meio de imagens gráficas, por meio da organização das ações práticas e via algoritmo/ resolução escrita 2. Foram propostas diferentes maneiras de resolução com intuito de estabelecer relação entre a construção dialética das operações de adição e subtração e a evolução dos procedimentos utilizados para a resolução dos problemas aditivos. O estudo demonstrou que “na medida em que a interdependência entre a adição e a subtração se configura, os sujeitos evoluem em seus procedimentos, em suas explicações e também apresentam um aumento no número de seus acertos quando dos cálculos numéricos escritos” (p.168).

Diante disso, algumas implicações resultantes desse estudo merecem ser destacadas:

> • [...] as operações de adição e subtração devem ser trabalhadas ao mesmo tempo pelas crianças e não uma de cada vez como se tratassem de operações sem relação entre si.
> • [...] importância de se trabalhar a resolução de problemas aditivos em diferentes situações, não se restringindo apenas ao exercício mecanizado das operações já aprendidas. O interessante é o professor dê oportunidade para que os sujeitos experimentem outras formas de resolução, para que construam novos procedimentos para se chegar às respostas e que com isso entendam os caminhos percorridos por eles para alcançá-las (ibidem, 168).

Moro (1998) ao reinterpretar algumas seqüências de construções cognitivas individuais de aprendizagem do sistema de adição / subtração traz algumas derivações pedagógicas que podem auxiliar na construção desses conceitos matemáticos:

> ao identificar invariantes em seus patamares de construção e prováveis interligações, ela mostra quais dentre eles devem ter a atenção do professor a cada momento do processo de compreensão do aprendiz, quais dentre eles devem e podem ser então objeto de intervenção específica e como esta deve caracterizar-se. Dos recortes que focalizamos, vimos entre outros, novamente, a importância de serem trabalhados, no plano da ação e da interpretação: a correspondência entre elementos das coleções quantitativas, a bijecção com a decorrente atribuição de quotas comuns a elementos de mesma posição e diferentes na série.(p.30).

A autora acredita que esses invariantes constituem-se dificuldades para os indivíduos sobreporem as ações de adicionar às suas opostas, de subtrair, necessárias para a estruturação dessas operações em um sistema. Sendo assim, é relevante ativá-los, tanto no sentido aditivo como no subtrativo.

Os estudos realizados por Moro (1998) apontam para a importância de intervenção escolar para sustentar a aprendizagem da adição e da subtração, devido as especificidades de tal processo. Contudo, faz sentido identificar os invariantes relativos à construção e transformações desses conceitos para que o ensino do professor venha ser desafiante em relação "aos esquemas prévios dos alunos, na superação dos obstáculos epistemológicos próprios da compreensão específica de cada conceitos, o que desenha a necessidade de o professor intervir com adequação e propriedades específicas" (p.30). Em outras palavras, é preciso que o professor conheça os invariantes que intervêm na construção da adição e da subtração para que suas ações sejam voltadas para superação desses obstáculos que dificultam a aprendizagem de tais conceitos, proporcionando situações que ponham em teste os esquemas prévios dos sujeitos.

Alves (1999) analisando os estágios da solução de problemas em que os sujeitos apresentam maior dificuldade foi observado que a obtenção da informação matemática, a partir do enunciado verbal, foi responsável pela maior quantidade de fracassos. A análise permitiu verificar que quando o sujeito conseguia ultrapassar o primeiro estágio- obtenção da informação matemática- encontrava dificuldade no segundo estágio, relacionado à escolha da operação correta para resolver o problema.

Vasconcelos (1998) realizou um estudo visando analisar a contribuição do uso de representações no ensino da resolução de problemas aditivos. Foram escolhidas a representação simbólica na forma de diagrama de Vergnaud e a representação gráfica de parte-todo de Riley, Greeno e Heller que especifica que alguma quantidade pode ser dividida em duas partes, contanto que a combinação de suas partes não exceda nem fique abaixo do todo. Os sujeitos da pesquisa foram 60 crianças de 8 anos de idade que cursavam a 2ª série de uma escola particular em Recife, divididos em três grupos. O estudo contou com 8 sessões de resolução de problemas, nas quais cada grupo recebeu um tipo de treinamento: o primeiro grupo resolveu os problemas utilizando os diagramas propostos por Vergnaud, o segundo grupo resolveu de acordo com a representação gráfica de parte-todo e o terceiro foi levado a resolver os problemas utilizando o material concreto como recurso auxiliar.

Os resultados da pesquisa de Vasconcelos (1998) mostram que a "introdução de uma simbolização auxiliar que explicite as operações de pensamento necessárias para manipular relações envolvidas na situação-problema poderá fazer com que a criança escolha, com compreensão, a operação aritmética necessária" (p.69). Porém, em relação aos problemas aditivos, a representação proposta por Vergnaud mostrou-se mais adequada para o raciocínio na resolução de qualquer tipo de problema aditivo, ao contrário da representação de Riley, Greeno e Heller que apresentou-se inadequada para uma boa parte dos problemas.

A compreensão do problema é o primeiro passo para a obtenção da informação matemática, para posteriormente processá-la e retê-la. A pesquisa de Vasconcelos (1998) aponta para a importância de uma representação que auxilie na compreensão do enunciado, considerada por Alves (1999) como uma das principais dificuldades para a resolução de problemas.

Em relação aos problemas aditivos Damm (2003) distingue dois registros de representação: o tratamento aditivo e a organização redacional. O tratamento aditivo consiste em um conjunto de números, no qual cada número pode ser encontrado a partir de outros números por uma operação de adição ou de subtração. A organização redacional é constituída por três tipos de dados:

> 1. os dados referentes à situação extramatemática descrita no enunciado (...)
> 2. os dados que determinam o valor operatório dos números e que dão a esses números um valor de estado ou transformação (...)
> 3. os dados concernentes às relações entre os dados operatórios: são todos os dados do texto que permitem situar, uns em relação aos outros, os dados operatórios do enunciado. (DAMM, 2003, p.40)

Segundo Damm (2003) os dados referentes aos valores operatórios são atribuídos pelos verbos portadores da informação numérica contidos no enunciado. Por um lado, esses verbos podem empregar somente um dos termos do par de antônimos : ganha 5 bolinhas... ganha 2 bolinhas e por outro, podem empregar os dois termos do par de antônimos: ganha 2 bolinhas e perde 5 bolinhas. Essa diferenciação exerce um papel importante na passagem do enunciado para o tratamento aritmético, pois os verbos portadores da informação numérica constituem-se um dos elementos que interferem na escolha da operação.

Um outro dado que contribui para essa passagem diz respeito aos dados do texto que permitem relacionar entre si os dados operatórios do problema. Dependendo do tipo de texto esses dados são marcados pela ordem de sucessão de frases, pelo emprego de advérbios de tempo, de adjetivos ordinais ou por nomes que exprimem relações de tempo, no caso te textos narrativos e por expressões comparativas, em textos descritivos.

Damm (2003) afirma que a dificuldade na escolha da operação na passagem do texto ao tratamento aritmético está relacionado a congruência ou não congruência dos verbos portadores de informação, determinada por três fatores.

> O primeiro fator concerne à necessidade ou não de efetuar uma inversão (em relação ao dado final) quando levamos em consideração os valores operatórios. (...)
> O segundo fator concerne à polarização dos verbos que possuem um valor operatório de transformação. Existe uma correspondência direta e espontânea entre o sentido do verbo "ganhar" e a operação "+", como entre o sentido do verbo "perder" e a operação "-". Então, existe correspondência no caso: perde (ganha) perde com a operação "-" enquanto não existe correspondência na situação perde perde (perde) com a operação "+".
> O terceiro fator é a presença ou a ausência de verbos antônimos, isto é, de polarização contrária (ganha/perde, sobe/desce) no enunciado. (p.41-2)

Em se tratando dos problemas não-congruentes, considerados obstáculos mesmo para os alunos de 5ª série, Passoni e Campos (2003) afirmam que esses passam a apresentar menos dificuldades a partir do uso de novas linguagens. Os autores sugerem que para cada conjunto de problemas talvez haja um 'hábitat natural' dentro da matemática que permita explorar os recursos da própria matemática.

> Notamos que os enunciados dos 12 problemas de Vergnaud são todos eles congruentes a descrições ou equações quando estendemos o campo numérico para o grupo aditivo dos inteiros. Para resolver essas equações é preciso pouquíssima manipulação algébrica. Nesse caso, os verbos portadores de informação numérica no enunciado devem ser relacionados aos números e não mais à adição ou à subtração. Além disso, estaremos considerando apenas adição (já que, nos inteiros, a subtração é um caso particular da adição, isto é, $x-y=x+(-y)$) (p.54).

Dentro dessa perspectiva, realizaram uma experiência em uma classe de 36 alunos de 3ª série do ensino fundamental envolvendo os problemas das relações transformação de estados e composição de duas transformações O estudo constou de quatro fases. Na primeira fase, foi realizado um pré-teste que incluía a resolução individual dos 12 problemas de Vergnaud. Na fase seguinte, realizaram uma seqüência de ensino contendo adição de inteiros e resolução de equações. Após os alunos estarem familiarizados com o assunto, introduziram os 12 problemas, para posteriormente aplicarem o pós-teste, com os mesmos problemas, mas com valores numéricos diferentes.

Passoni e Campos (2003) consideram que a melhora do índice de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste está relacionado ao fato dos problemas aditivos terem sido tratados “no campo mais amplo dos números inteiros e dos elementos de pré-algébra” (p.55). Os autores acreditam que tratando os problemas não- congruentes dentro de um ‘hábitat natural’ as dificuldades poderiam ser minimizadas.

Brandão e Selva (2000) ao estudarem como crianças de 4 a 6 anos resolvem problemas de subtração, usando a notação escrita ressaltaram alguns encaminhamentos metodológicos para o trabalho com a resolução de problemas, que podem ser direcionados para outros níveis de ensino, diferentes da educação infantil. No rol de encaminhamentos, destacam a importância do professor conhecer os diversos tipos de problemas, estimulando a interação entre as crianças, fazendo perguntas, explorando as diferentes estratégias de solução que elas utilizam, seja mediante o uso de cálculo mental, dos dedos ou materiais concretos, ou de registros no papel. Em relação a este último aspecto, afirmam que compete ao professor conhecer e utilizar as possibilidades que cada um destes recursos proporciona.

CAPÍTULO III

OBJETIVOS E METODOLOGIA DA PESQUISA

Tivemos a preocupação, desde a elaboração do projeto que norteou esta pesquisa até a concepção da mesma, em definir claramente nossos objetivos, gerais e específicos. Isso se deve ao fato de que em meio a tantos caminhos que surgem ao longo do árduo ato de pesquisar, tínhamos que escolher o que nos parecia mais coerente com os objetivos traçados.

Toda essa preocupação em delinear os caminhos a percorrer está relacionada às questões que nos propusemos responder: Que tipos de problemas são apresentados nos livros didáticos? Quais as dificuldades que os alunos apresentam ao resolver problemas de estrutura aditiva? Que dificuldades apresentam para identificar a operação necessária para resolvê-los? Quais as dificuldades apontadas pela literatura de referência envolvidas nos problemas de estrutura aditiva?

1. Objetivo geral

- Analisar a resolução de problemas de estruturas aditivas de alunos de 3ª série do ensino fundamental, com o intuito de identificar que tipos de problemas apresentam dificuldades para os alunos, bem como os prováveis aspectos, de ordem cognitiva ou didática, que as condicionam;

1.1- Objetivos específicos:

- Fazer levantamento dos tipos de problemas de estrutura aditiva presentes nos livros didáticos de matemática de uso mais frequente nas escolas envolvidas;

- Comparar os problemas mais freqüentes nos livros didáticos em relação aos tipos de problemas de estrutura aditiva propostos por Vergnaud (1990) e sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2000): relação parte-parte-todo, transformação de estados, comparação de estados e composição de duas transformações;

- Classificar os problemas conforme os níveis de dificuldade;

- Selecionar diferentes tipos de problemas de estrutura aditiva e submeter à resolução dos alunos da população estudada, visando descrever e analisar os tipos de dificuldades em relação aos mesmos;

2.-METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada em duas etapas. Na primeira etapa, foi realizado um levantamento de materiais que são manuais didáticos de matemática destinados à 3 ª série do Ensino Fundamental, utilizados em um maior número de escolas de Campo Grande/ M.S. Ressaltamos que tivemos a preocupação de selecionar materiais com um tipo de organização diferente, ou seja, um livro didático e um material apostilado.

Para obtermos a informação referente ao material didático da rede pública de ensino visitamos o site do MEC (www.fnde.gov.br) em setembro de 2003. Neste site constam a relação de todas as escolas públicas que receberam material do MEC e, principalmente, o nome do material adotado. De um total de 163 escolas cadastradas, 5 não oferecem as séries iniciais do Ensino Fundamental, restando-nos 158 escolas, das quais 68 fazem uso do livro Vivência e Construção, de Luiz Roberto Dante. Após essa constatação, verificamos junto à editora que distribuí esse material, quais escolas particulares trabalham com o referido livro, para que pudéssemos selecionar escolas com clientelas de nível sócio-econômico diferente.

Em relação ao material apostilado do Grupo Positivo, constatamos que este é atualmente utilizado por 12 escolas particulares[7] de Campo Grande. Cabe ressaltar que a rede FUNLEC, que adota tal material, possuía até o ano de 2002 uma parceria com o governo do Estado de Mato Grosso do Sul, para atuar em algumas escolas estaduais de Campo Grande. Sendo assim, não pudemos contar com uma escola pública que fizesse uso do material apostilado, como era nossa intenção inicial.

Após a seleção dos materiais didáticos foram listados os problemas aditivos apresentados por ambos, comparando-os à relação elaborada por Vergnaud (1990).

[7] Fênix, Oswaldo Cruz, GeraçãoGruta, ABC, CEALP, Avant Garde, 5 escolas da Rede FUNLEC, Educarte e SEALP.

Na segunda etapa, mediante os resultados obtidos selecionamos nove problemas de estrutura aditiva para compor a prova a ser aplicada. A prova foi composta por problemas pertencentes às categorias que apareceram ou não apareceram em ambos manuais de matemática usados como materiais didáticos– o livro e o material apostilado, por um lado, adaptados da relação de Vergnaud (1990) e por outro, retirados dos manuais didáticos analisados (ANEXO A).

A prova foi aplicada de duas formas: coletiva e individual. Na coletiva, submetemos os problemas selecionados à resolução por 54 alunos da terceira série da população estudada, protocolados em folhas de papel ofício. Recomendamos que não utilizassem a borracha durante a resolução, visando manter o registro das tentativas anteriores à solução considerada correta, pois estas podem constituir importantes elementos para análise. A aplicação coletiva aconteceu sem que os alunos tivessem o conhecimento do conteúdo que envolvia os problemas, eram apenas comunicados de que se tratava de uma atividade individual contendo problemas de matemática.

Na etapa individual, após a aplicação coletiva da prova, selecionamos 9 alunos de cada escola compondo um grupo de 27 alunos, que correspondia à metade dos alunos que realizaram a prova coletiva. Para a escolha dos alunos nessa etapa não foi estipulado nenhum critério, a não ser o fato de terem participado da prova coletiva. Foi entregue uma prova contendo os mesmos problemas da etapa coletiva, para a qual repetimos as mesmas recomendações para a resolução. Mediante uma entrevista clínica, os alunos puderam explicitar seu pensamento durante a resolução dos problemas, informando: como pensavam para resolver o problema; qual a pergunta que deveria ser respondida e qual a reposta encontrada; como poderiam saber se a resolução apresentada respondia à pergunta do problema e se este permitia uma resolução alternativa.

A escolha por esta metodologia se fez por acreditarmos que haveria uma aumento na quantidade de resoluções corretas na prova individual em relação à prova coletiva. Isso porque oferecíamos à criança a oportunidade de fazer o retrospecto ou a verificação permitindo que examinasse se a solução obtida estava correta e se existia uma outra maneira de resolver o problema. Encaminhamento que não é vivenciado e tão pouco estimulado pela prática pedagógica da maioria de nossas escolas.

3. OS SUJEITOS E O CAMPO INVESTIGADO

Os sujeitos desta pesquisa foram constituídos por alunos pertencentes a uma escola pública e duas escolas particulares de Campo Grande/ M.S. Utilizamos como critério de escolha o fato de trabalharem com o material didático de matemática *Vivência e Construção*, de Luiz Roberto Dante ou com o material apostilado do *Grupo Positivo.*

Tínhamos a intenção de trabalhar com quatro escolas, duas particulares e duas públicas, formando dois grupos mistos (particular e pública): um grupo que adotasse o material *Vivência e Construção* e outro grupo que utilizasse o material do *Positivo.* Entretanto, conforme dissemos anteriormente, algumas das escolas públicas que adotavam o material do Positivo romperam o convênio que possuíam com o governo do estado, tornando-se escolas particulares. Sendo assim, tivemos que ficar apenas com duas escolas particulares e uma pública.

A escola A pertencente à rede municipal de ensino e adota o livro didático Vivência e Construção há 3 anos. Localizada numa região da cidade não muito distante do centro e próxima à escola B, oferece desde a Educação Infantil até as séries finais do Ensino Fundamental.

A escola B pertencente à rede privada de ensino e utiliza o material apostilado há 19 anos. Também oferece os mesmo níveis de ensino da escola A.

A escola C pertencente à Missão Salesiana de Mato Grosso utiliza o livro Vivência e Construção, há 2 anos. Localizada na região central da cidade, oferece desde a Educação Infantil até o Médio.

Nas referidas escolas foi feito um contato com os diretores e coordenadores para que permitissem a participação dos alunos na pesquisa. Cabe ressaltar que o nível sócio-econômico das clientelas é bastante diferenciado nas escolas. Na escola A e B os alunos possuem um nível social-econômico variando entre médio e baixo. Já na escola C este nível varia entre médio e alto.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Os dados coletados serão apresentados em dois momentos. No primeiro, descreveremos o estudo realizado com os manuais didáticos, relativo ao levantamento dos problemas de estrutura aditiva. No segundo, apresentaremos os resultados das aplicações das provas coletiva e individual, realizados pelos sujeitos das escolas envolvidas.

1-Os problemas de estrutura aditiva nos manuais didáticos analisados

Apresentaremos os dados coletados a partir de um levantamento realizado no livro didático *Vivência e Construção* e material apostilado *Positivo.* Conforme foi descrito pretendeu-se verificar a presença das seis relações de base do campo conceitual das estruturas aditivas, elaborada por Vergnaud (1997). Cabe destacar que estes materiais são organizados de maneira diferente. O livro didático possui um único volume. Já o material apostilado está organizado em 4 volumes, destinados a cada bimestre do ano letivo.

Quanto à distribuição dos problemas aditivos nos materiais analisados, verificamos que o livro didático apresenta uma introdução formal aos conceitos de adição e subtração, com uma unidade específica para abordar esses conceitos, na qual concentra-se a maior parte dos problemas aditivos deste material. Cabe destacar, que a unidade referida apresenta, por um lado, uma introdução aos conceitos, iniciando com uma explicação ou situação resolvida, seguida de exercícios de algoritmos ou problemas-padrão para o aluno resolver. Por outro, verificamos que existe uma separação entre adição e subtração, aparecendo primeiro os problemas de adição e depois os de subtração. Ao final da unidade é proposto um relacionamento entre as operações, chamadas de inversas. Observamos que os problemas propostos exigem, em sua maioria, cálculo exato e escrito, obedecendo sempre à mesma estrutura, com problemas mais didáticos, pensados para serem resolvidos na escola.

Já o material apostilado não apresenta uma unidade específica para a adição e a subtração, com a intenção de introduzir esses conceitos e apresentar modelos ou regras a serem seguidos. Os problemas aditivos perpassam os 4 volumes, possuindo uma estrutura diferenciada em relação aos apresentados pelo livro didático. Em geral, as atividades propostas estão relacionadas às situações que envolvem jogos, textos, desafios, tratamento de informação- gráficos e tabelas- e situações do cotidiano. As situações contemplam diferentes tipos de cálculo, exato e aproximado, mental e escrito.

Em relação aos tipos de relações de base de estrutura aditiva presentes nos problemas, em geral, os materiais apresentaram praticamente as mesmas relações, como pode ser visto na tabela 1.

Tabela 1- Freqüência das relações de base de estrutura aditiva nos problemas dos materiais didáticos analisados, quanto à categoria proposta por Vergnaud

		Material apostilado	Livro Vivência e Construção
1.Parte-parte-todo	1.1	18	30
	1.2	9	8
2.Transformação de estados	2.1	1	5
	2.2	1	12

	2.3	12	4
	2.4	2	1
	2.5	0	4
	2.6	0	0
3.Comparação de estados	3.1	2	3
	3.2	2	1
	3.3	8	4
	3.4	21	12
	3.5	0	0
	3.6	0	0
4.Composição de duas transformações	4.1	0	0
	4.2	0	0
	4.3	0	0
5.Composição de duas relações	5.1	0	0
	5.2	0	0
6. Transformação de uma relação	6.1	0	0
	6.2	0	0

Verificamos que o livro didático apresenta uma quantidade maior de problemas relativos à relação da Parte-parte-todo, sendo 30 que buscam o todo conhecendo-se as duas partes, como por exemplo: *Uma exposição de carros antigos foi visitada por 1124 pessoas no sábado e por 1297 pessoas no Domingo. Qual o total de visitas nesse final de semana?* (p.92). Os que buscam uma parte, conhecendo-se o todo e a outra parte, totalizam 8, como no exemplo seguinte: *Uma indústria já produziu 5988 peças. Para atingir 10 000 peças ainda devem ser produzidas aproximadamente: 400 peças, 4000 peças ou 5000 peças?* (p.100). Já o material apostilado apresenta 18 do primeiro grupo e 9 do segundo.

A relação Transformação de Estados se faz presente em uma quantidade maior de problemas no livro didático do que no material apostilado:

- 5 problemas que buscam o estado final quando a transformação é positiva; exemplos:

Jonas tinha R$ 526.00na poupança e depositou R$ 143.00 Quanto ele tem agora de saldo na poupança? (p.90)

- 12 que buscam o estado final quando a transformação é negativa;

Paula tinha 80 papéis de carta na sua coleção e deu 50 à Maria. Com quantos papéis de carta Paula ainda ficou? (p.98)

- 4 quando a busca é pela transformação positiva,

Renato quer comprar uma bicicleta de R$ 300.00. Como já tem R$ 178.00, quanto dinheiro ainda deve juntar? (p.99)

- 1 quando a busca é negativa

José recebeu R$ 3.70 de troco ao pagar uma compra com R$ 10.00. Quanto ele gastou nessa compra? (p.241)

- e 1 que busca o estado inicial quando a transformação é positiva.

Tinha uma quantia em dinheiro e ganhei mais R$ 75.00. Fiquei com R$ 108.00. Quanto eu tinha? (p.106)

Em relação ao material apostilado verificamos 1 problema que busca o estado final quando a transformação é positiva, 1 que busca o estado final quando a transformação é negativa, 1 quando a busca é pela transformação positiva, 2 quando a busca é pela transformação negativa. Conforme podemos verificar na tabela 1, o livro didático não apresenta problemas que buscam o estado inicial quando a transformação é negativa e o material apostilado não apresenta problemas quando a busca do estado inicial gera uma transformação positiva ou negativa.

Quanto aos problemas da relação Comparação de estados, constatamos que o material apostilado apresenta uma quantidade maior de problemas, sendo:

- 2 problemas que buscam o referido, quando esse é maior que o referente;

Marcelo tem 4 anos a mais que Carolina. Carolina tem 9. Quantos anos tem Marcelo? *(p.9, v.1)*

- 2 que buscam o referido quando esse é menor que o referente;

Fernando é mais novo que Laura 28 anos. Laura tem 35 anos. Quantos anos tem Fernando? *(p.9, v.1)*

- 8 que buscam a relação, quando o referido é menor que o referente

Ao nascer o coala[8] mede cerca de 2 centímetros.(...)

a) Com a régua meça o comprimento do apontador e registre as medidas:

Resposta: *2,5* cm ou 25 mm

---

[8] Manífero australiano semelhante ao urso.

c) Quantos centímetros o comprimento do coala é menor que o do apontador. *(p.46-7, v.4)*

- e 21 que buscam a relação, quando o referido é maior que o referente.

Quadra simples: 8,23 m x 23,8 m

Piscina olímpica:22,8 m x 50 m

Quantos metros a mais tem o contorno de uma piscina olímpica em relação a uma quadra de tênis simples? *(p.7, v.4)*

Em relação ao livro didático encontramos 3 problemas que buscam o referido, quando esse é maior que o referente, 1 que busca o referido quando esse é menor que o referente, 4 que buscam a relação, quando o referido é menor que o referente e 12 que buscam a relação, quando o referido é maior que o referente. Podemos verificar ausência no livro didático e no material apostilado de problemas que buscam o referente, quando esse é maior ou menor que o referido.

Os dois materiais analisados não fizeram referência a problemas da relação Composição de duas transformações, apesar desta relação ter sido indicada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) para ser trabalhada nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Quanto às relações Composição de duas relações e Transformação de uma relação, essas também não são apresentadas nos materiais analisados. Acreditamos que essa ausência está relacionada aos conteúdos que são abordados por estas relações, como por exemplo, o conjunto dos números inteiros, tendo em vista que tais conteúdos mais complexos serão trabalhados nas séries finais do Ensino Fundamental.

2. Descrição dos dados coletados nas entrevistas: comparação das três escolas

Para realizar a descrição dos dados coletados nas entrevistas individuais, realizadas durante a aplicação dos problemas descreveremos os resultados obtidos em cada um dos 9 problemas propostos em relação aos três aspectos analisados: a) operação realizada e justificativas, b) estratégias para verificação dos problemas e c) resolução alternativa para os problemas.

Problemas da Relação Parte-parte-todo

Problema 1.1: Um elefante pesa 4000 quilogramas e seu filhote, 1700 quilogramas. Quantos quilogramas pesam os dois juntos?

Apresentamos, a seguir, a freqüência de respostas certas e erradas dos alunos quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 1 da relação Parte-parte-todo.

Tabela 2 - Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 1.1 da relação Parte-parte-todo

Um elefante pesa 4000 quilogramas e seu filhote, 1700 quilogramas. Quantos quilogramas pesam os dois juntos?

Operação realizada	**Justificativas**	**ESCOLA**							
		A – Pública/ livro		**B –Particular/ apostila**		**C – Particular/ livro**		**Total**	
		Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
Adição	Somei	2	4	8	1	1		11	5
	Tem que somar porque está perguntando quanto pesam os dois juntos	2	1			8		10	1
	Total	4	5	8	1	9		21	6

Observamos, a partir dos dados da tabela 2, que o problema não apresentou dificuldades para a maioria dos alunos, considerando que 21 dos 27 alunos entrevistados apresentaram resoluções corretas. Embora na escola pública 4 alunos tenham acertado e 5 tenham errado.

A seguir, estão descritos os tipos de respostas indicadas pelos alunos quando questionados sobre como poderiam verificar se a resolução do problema foi feita corretamente.

Tabela 3- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 1.1 da relação Parte-parte-todo

Um elefante pesa 4000 quilogramas e seu filhote, 1700 quilogramas. Quantos quilogramas pesam os dois juntos?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Somando	2	4	3	9
Porque é fácil		1		1
Não consigo explicar	1			1
Quando quer saber quanto os dois juntos tem que ser de mais	5	4	5	14
Essa conta vai dar o resultado certo	1		1	2
Total	9	9	9	27

A, B e C são referentes, respectivamente, às escolas pública/livro, particular/apostila e particular/livro .

A afirmativa " quando quer saber quanto tem os dois juntos tem que somar" foi a mais escolhida pelos alunos das três escolas estudadas. Essa afirmação foi feita mesmo por aqueles que no momento do cálculo realizaram uma subtração:

Eu somei porque quer saber quantos quilogramas pesavam os dois juntos. (A1)[9]

Porque de menos não dá, porque é os dois juntos. (A5)

Somando, porque os dois juntos é mais. Um mais o outro. (B25)

[9] A letra que aparece ao final dessa transcrição e das demais se refere às escolas as quais os alunos pertencem: A –escola pública / livro, B- particular / apostila e C – particular / livro. O número diz respeito à seqüência estabelecida durante a aplicação da prova coletiva.

Mostraremos, na tabela a seguir, as respostas dos alunos quando questionados sobre a possibilidade de haver outras formas de resolução do problema.

Tabela 4-Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 1.1 da relação Parte-parte-todo

Um elefante pesa 4000 quilogramas e seu filhote, 1700 quilogramas. Quantos quilogramas pesam os dois juntos?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
Não	• Não sem justificativa	4	2	5	11
	• Não porque pergunta os dois juntos, tem que somar	3	4	1	8
	• Não sei		2	2	4
Sim	• Invertendo os números	2	1	1	4
	Total	9	9	9	27

Percebemos que 11 dos 27 alunos afirmaram que não. Porém, não apresentaram justificativas

Problema 1.2 - Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

A tabela 5 descreve a freqüência de acertos e erros dos alunos quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 1.2 da relação Parte-parte-todo.

Tabela 5- Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 1.2 da relação Parte-parte-todo

Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

Operação realizada		**Justificativas**	Escolas							
			A		**B**		**C**		**Total**	
			C	E	C	E	C	E	C	E
Subtração		• Se eu tirar 340 vai sobrar o resultado	4		4		8		16	
• Adição	• Cálculo mental	• Descobrindo 340 mais quantos vai dar 750	3	1	2				5	1
	• Algoritmo	• Fazendo uma conta de mais		1		2		1		4
• Multiplicação		• Colocando o sinal de vezes				1				1
		Total	7	2	6	3	8	1	21	6

A, B e C são referentes, respectivamente, às escolas pública/livro, particular/apostila e particular/livro . C e E referentes a Certo e Errado.

Observamos, pelos dados da tabela, que este problema não ofereceu grandes dificuldades aos alunos, tendo em vista que dos 27 alunos, 21 apresentaram resoluções corretas. Podemos observar que dos 6 alunos que apresentaram resolução errada, 3 pertencem a escola B.

Em relação ao cálculo mental, a tabela 4 mostra que este recurso não foi utilizado por alunos da escola particular que trabalha com o livro didático. Isto também pode ser verificado na resolução dos outros problemas que serão apresentados posteriormente.

A tabela 6, a seguir, aponta os tipos de respostas indicadas pelos alunos quando perguntados sobre como poderiam verificar se haviam feito a resolução corretamente do problema 1.2 da relação Parte-parte-todo.

Tabela 6- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 1.2 da relação Parte-parte-todo

Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Tirando 340 de 750	4	4	8	16
Juntando o dinheiro dos dois para chegar em 750	3	2		5
Somando, porque economizei	2	2	1	5
Já estou acostumado		1		1
Total	9	9	9	27

Verificamos nesta tabela que dos 27 alunos, 16 demonstraram estar correta sua resolução porque ao tirar 340 de 750 seria possível encontrar o resultado do problema. A metade desses alunos pertencem à escola C. Exemplo:

Porque tinha que juntar os dois dinheiros para chegar em 750. Eu pensei no mais. (C 32)

A seguir, mostraremos os tipos de respostas dos alunos quando questionados sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa para o problema 1.2 da relação Parte-parte-todo.

Tabela 7- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 1.2 da relação Parte-parte-todo

Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei		2		2
Não	Não sem justificativa	8		7	15
	Não, porque vai dar outro resultado	1	4	1	6
	Não, porque é economizei		1		1
	Não, porque eu fiz a prova real		1		1
Sim	Fazendo a prova real			1	1
	Invertendo os números		1		1
	Total	9	9	9	27

Percebemos pela tabela 7, que 15 dos 27 alunos afirmaram que não existe uma resolução diferente da apresentada. Entretanto, não justificam o porquê disto. Verificamos que essa alternativa foi escolhida pela maioria dos alunos da escola A e da escola C.

A afirmação que justifica a não existência de uma outra forma de resolução, devido ao fato de que essa geraria um outro resultado, se refere a 6 dos 27 alunos, sendo que 4 deles pertencem à escola B.

Problemas da relação Transformação de estados

Problema 2.2- Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?

A tabela seguinte apresenta a freqüência de respostas certas e erradas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 2.2 da relação Transformação de estados.

Tabela 8- Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 2.2 da relação Transformação de estados
Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?

Operação realizada	**Justificativas**	**Escolas**							
		A		**B**		**C**		**Total**	
		C	E	C	E	C	E	C	E
Subtração	Subtraindo o que ela tinha do que gastou	7	1	8		9		24	1
Divisão	Coloquei os números e somei				1				1
Adição	Fazendo uma conta de mais	1						1	
	Total	8	1	8	1	9		25	2

Observamos que 24, dos 27 alunos entrevistados que obtiveram êxito na resolução deste problema, recorreram à estratégia de subtrair do total o que foi gasto. Sendo assim, podemos afirmar que o problema não ofereceu dificuldade de resolução, tendo em vista que a maioria dos alunos optou pela subtração para resolver o problema.

A seguir, apresentaremos as respostas dos alunos quando questionados sobre como seria possível verificar se a resolução feita por eles, para o problema 2.2 da relação Transformação de estados, estaria correta.

Tabela 9- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 2.2 da relação Transformação de estados
Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
É de menos porque está falando que ela gastou	8	8	9	25
Tem que fazer conta de mais para saber quantos reais ela tem agora	1			1
Se não estiver certo mudo o sinal da conta		1		1
Total	9	9	9	27

Constatamos pela tabela 9 que o tipo de verificação mais recorrente está relacionada à afirmação “ é de menos porque ela gastou”. Dos 27 alunos entrevistados, 25 optaram por esta justificativa. Justificativa que condiz com a operação escolhida pela mesma quantidade de alunos das três escolas envolvidas.Podemos perceber que apenas um aluno optou pela adição para resolver o problema e outro por mudar o sinal da conta.

A tabela 10 apresenta as respostas dos alunos ao serem questionados sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa para o problema 2.2 da relação Transformação de Estados.

Tabela 10- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 2.2 da relação Transformação de estados

Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei		1	1	2
Não	Não sem justificativa	7	2	8	17
	Não, porque não vai dar o mesmo resultado	1	1		2
	Não, porque tá falando que ela gastou	1	5		6
	Total	9	9	9	27

Verificamos que 25 dos 27 alunos entrevistados afirmaram que não existe uma outra forma de resolver o problema. Desse total, 17 alunos não conseguiram explicar os motivos que não permitem uma outra maneira de resolução. Podemos observar que 5 dos 9 alunos da escola B conseguiram explicitar o motivo que torna a resolução realizada, a única possível. Para exemplificarmos, transcrevemos falas de 3 destes alunos:

Não, porque está falando que ela gastou e não economizou. Se fosse assim teria que aumentar e não diminuir. (B19)

Não, porque se ela gastou tem que ser de menos. (B23)

Não sei. Pode até ter outro jeito, mas eu não sei qual. Mas tem que ser de menos. (B32)

Problema 2.6 - Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?

A seguir, estão descritas as respostas certas e erradas dos alunos, quanto à operação realizada e respectivas justificativas para o problema 2.6 da relação Transformação de estados.

Tabela 11-Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 2.6 da relação Transformação de estados

Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?

Operação realizada		**Justificativas**	**Escolas**							
			A		**B**		**C**		**Total**	
			C	E	C	E	C	E	C	E
Subtração	Cálculo mental	Tinha que descobrir que número menos 35 dava 12		1						1
	Algoritmo	Se ele perdeu eu diminui		2		2		2		6
Adição	Cálculo mental	Fiz adição porque faltava uma conta			1				1	
		Fiz a conta de mais para chegar em 35		1						1
	Algoritmo	Eu fiz de mais para saber quantas ele tinha	4		4		7		15	
Multiplicação		Se ele perdeu eu diminui				1				1
		Eu fiz de mais para saber quantas ele tinha				1				1
Total			4	4	5	4	7	2	16	10
Não soube resolver			1						1	

Na tabela 11 mostra que a operação mais utilizada para resolver este problema foi a adição. Sendo que dos 17 alunos que fizeram esta opção, 15 optaram pela estratégia de fazer a conta de mais via algoritmo para saber quantas figurinhas ele tinha antes, como mostra a justificativa abaixo;

Porque a conta de mais poderia mostrar quantas figurinhas ele tinha antes de jogar. É porque como ele tinha perdido 35 e agora ele tem 12. Fazendo uma conta de mais dá 47 e aí a gente pode obter o resultado de quanto ele tinha antes (B26).

Podemos observar que 2 alunos optaram pela adição via cálculo mental por motivos diferentes. Um optou pela adição alegando que havia realizado todas as outras operações e nenhuma delas havia respondido a pergunta do problema, faltando apenas a adição. O outro fez opção por essa operação para saber que número mais 12 daria 35.

Observamos que os 2 alunos que optaram pela multiplicação, apresentaram justificativas que não correspondiam à operação escolhida: um afirmou que se Carlos perdeu tinha que diminuir e o outro que fez uma conta de mais para saber quantas figurinhas Carlos tinha.

Podemos verificar que apenas 1 aluno não conseguiu resolver o problema 2.6.

A tabela 12 apresenta as respostas dos alunos quando questionados sobre como poderiam comprovar que a resolução apresentada por eles, para o problema 2.6 da relação Transformação de estados, estava correta.

Tabela 12- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 2.6 da relação Transformação de estados

Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fiz de menos porque ele perdeu	2	1	2	5
Tenho que fazer 35 mais 12 para saber quantas ele tinha antes de jogar	3	4	7	14
Fazendo a conta	1	2		3
Pensando no número que tira 12 dá 35		1		1
Pensando no número que tira 35 e dá 12	1			1
Porque a professora ensinou	1			1
Não sei explicar		1		1
Não consigo resolver	1			1
Total	9	9	9	27

Podemos verificar que 14 dos 27 alunos afirmaram que tem ser de mais para saber quantas ele tinha antes de jogar. Exemplos:

Se Carlos perdeu 35 e agora ele tem 12, eu somei 35 mais 12. (C45)

Porque se perdeu 35 e agora tem 12, eu tenho que somar. (C51)

As respostas dos alunos aos questionamentos sobre a existência de uma resolução alternativa para o problema 2.6 da relação Transformação de Estados, estão descritas na tabela 13.

Tabela 13- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 2.6 da relação Transformação de estados

Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?

		Escolas			
		A	B	C	Total
	• Não sei	1	2	1	4
Não	• Não sem justificativa	5	1	6	12
	• Não, porque vai dar outro resultado	1	2		3
	• Não, só somando	1	2		3
Sim	• Fazendo a prova real			1	1
	• Qualquer conta com esses números		1		1
	• Invertendo		1	1	2
	• Não soube resolver	1			1
	Total	9	9	9	27

Observamos na tabela 13 que para 18 dos 27 alunos não existe uma outra forma de resolver o problema e que para 6 destes 18 alunos, isso se justifica porque outra forma dará um outro resultado ou porque é somente somando que se obtém a resposta correta. Os 12 alunos restantes deste grupo não conseguiram elencar os motivos que não permitem ao problema uma resolução alternativa.

Problemas da Relação Comparação de estados

Problema 3.1- Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?

A tabela 14 apresenta a freqüência de respostas certas e erradas dos alunos quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 3.1 da relação Comparação de estados.

Tabela 14-Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 3.1 da relação Comparação de estados
Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?

Operação realizada		**Justificativas**	**Escolas**							
			A		**B**		**C**		**Total**	
			C	E	C	E	C	E	C	E
Subtração	Cálculo mental	Fiz uma conta de menos		1						1
	Algoritmo					1				1
Adição		Eu preciso aumentar, pois são três bonecas a mais	8		7		9		24	
Multiplicação		Coloquei o sinal e somei				1				1
		Total	8	1	7	2	9		24	3

Verificamos que 24 dos 27 alunos, que apresentaram resoluções corretas optaram pela adição e justificaram essa escolha porque o problema diz que são três bonecas a mais. Exemplos:

É de mais, porque tá falando que Flávia tem 3 a mais. (A3)

Porque tá falando que Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Tem que fazer adição para saber quantas bonecas Flávia tem. (C44)

As respostas dos alunos, quando indagados sobre como fariam para comprovar se a resolução apresentada por eles, para o problema 3.1 da relação Comparação de Estados, estaria correta, estão apresentados a seguir.

Tabela 15 - Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 3.1 da relação Comparação de estados

Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fazendo uma conta de menos	1	1		2
Tem que aumentar porque ela tem 3 a mais	8	7	9	24
Porque se colocar outro sinal vai dar errado		1		1
Total	9	9	9	27

Verificamos na tabela 15 que, 24 dos 27 alunos afirmaram que a adição é a operação correta para resolver o problema, porque ela tem 3 bonecas a mais, conforme mostram os exemplos abaixo:

Aqui está falando que ela tem 3 bonecas a mais. Isso quer dizer que tem que aumentar. (B19)

Eu somei porque ela tinha 3 bonecas a mais. (A1)

É porque ela tem 3 bonecas a mais é a mesma coisa que fazer conta de mais. (C52)

A tabela 16 apresenta as respostas dos alunos ao serem questionados sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa para o problema 3.1 da relação Comparação de estados.

Tabela 16- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 3.1 da relação Comparação de estados

Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei	1	1		2
Não	Não sem justificativa	5	1	6	12
	Não, porque vai dar outro resultado	1	1		2
	Não, porque tá perguntando quanto a mais	1	2		3
Sim	Invertendo	1	4	3	8
	Total	9	9	9	27

Podemos observar que dos 27 alunos entrevistados, 17 afirmaram que não existe uma resolução alternativa para este problema. Desses, 12 não souberam justificar os motivos desta resposta; 2 afirmaram que de outra forma resultaria em um resultado diferente e 3 disseram que não poderia haver uma resolução diferente da apresentada porque a pergunta é quanto a mais.

Verificamos, também, que 8 alunos explicaram que existe uma resolução alternativa, desde que se inverta os números e 2 afirmaram não saber fazer de outro jeito ou desconhecer a existência de uma outra forma de resolução.

Notamos que 7 dos 9 alunos da escola B possuem argumentos que justificam por um lado, a existência de uma resolução alternativa, invertendo os números e por outro, a não existência de uma resolução, pelo fato de dar outro resultado ou porque o problema pergunta quanto a mais. Fato que não pode ser percebido nas escolas A e C, nas quais somente 3 alunos de cada uma delas justificam a existência ou não de uma outra forma para resolver o problema.

Problema 3.4- José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo**?**

As respostas certas e erradas dos alunos, quanto à operação realizada e respectivas justificativas referentes ao problema 3.4 da relação Comparação de Estados., estão relatadas a seguir.

Tabela 17-Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 3.4 da relação Comparação de estados

José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?

Operação realizada	Justificativas	Escolas							
		A		B		C		Total	
		C	E	C	E	C	E	C	E
Subtração	Coloquei o sinal e somei				1				1
	Para saber quantos a mais eu preciso diminuir	2		3		7		12	
	Pensei numa conta de menos	3	1	2				5	1
Adição	Tá falando quanto a mais, tem que ser de mais		2	1	2		2	1	6
Total		5	3	6	3	7	2	18	8
Não soube resolver		1						1	

Dos 27 alunos entrevistados, 19 optaram pela subtração para resolver o problema. Desses, 12 justificaram essa opção tendo em vista que “para saber quanto mais eu preciso diminuir”.

Podemos perceber que a expressão “a mais” no enunciado não gerou um grande número de resoluções que tivessem optado pela adição. Apenas 6 alunos dos 27 escolheram a adição por este motivo.

A tabela 18 apresenta as respostas dos alunos ao serem questionados sobre como fariam a verificação da resolução apresentada para o problema 3.4 da relação Comparação de estados.

Tabela 18- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 3.4 da relação Comparação de estados

José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fazendo uma conta de menos	6	4	7	17
Fazendo uma conta de mais	2	3	1	6
Se tiver errado eu coloco outro sinal		1		1
Fazendo a prova real		1		1
Não sei explicar			1	1
Não sei resolver	1			1
Total	9	9	9	27

Podemos verificar que 17 dos 27 alunos afirmaram que a operação apresentada está correta, pois é preciso fazer uma conta de menos para saber quantos anos José tem a mais que Paulo.

Ao observarmos a tabela 18 verificamos que 6 alunos justificaram que a resolução está correta porque fizeram uma conta de mais, influenciados talvez pela expressão “a mais” do enunciado.

As respostas dos alunos, quando questionados sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa para o problema 3.4 da relação Comparação de estados, estão descritas na tabela 19.

Tabela 19 - Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 3.4 da relação Comparação de estados

José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei		2	1	3
Não	Não sem justificativa	5	2	6	13
	Não, porque vai dar outro resultado	2	2	2	6
	Não, porque tá perguntando quanto a mais		2		2
Sim	Invertendo		1		1
	Fazendo a prova real	1			1
	Não soube resolver	1			1
	Total	9	9	9	27

Nesse caso percebemos que 21 dos 27 alunos entrevistados afirmaram que não existe uma outra forma de resolver o problema. Desses, 13 não souberam justificar os motivos que os levaram a pensar desta forma; 6 afirmaram que não é possível resolver de outra maneira porque dará um resultado diferente e 2 afirmaram que a não existência está relacionada à pergunta do problema.

Podemos perceber que os alunos da escola B buscam justificar suas escolhas, com argumentos precisos, diferentemente dos alunos das outras escolas, que afirmam a não existência sem apresentar argumentos para tal. Exemplos:

Não, porque fazendo uma conta de mais vai dar outro resultado. (B26)

Não, porque aqui o problema tá falando a mais.(B23)

Problema 3.5- Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?

A seguir, estão descritas a freqüência de respostas certas e erradas dos alunos, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 3.5 da relação Comparação de estados.

Tabela 20- Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 3.5 da relação Comparação de estados

Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?

Operação realizada	**Justificativas**	**Escolas**							
		A		**B**		**C**		**Total**	
		C	E	C	E	C	E	C	E
Adição	Coloquei mais porque ela é menor	6		6		8		20	
Subtração	Se ela tem 4 anos a menos é só diminuir		2	1	1		1	1	4
Multiplicação	Coloquei o sinal de vezes				1				1
	Total	6	2	7	2	8	1	21	5
	Não soube resolver		1						1

Ao observarmos, na tabela 20, o desempenho dos alunos na resolução deste problema, percebemos que 20 das 27 crianças utilizaram a adição para solucionar o problema, obtiveram êxito na resolução e apresentaram o mesmo tipo de justificativa para tal escolha:

Eu pensei na idade dela e no que diz que é 4 anos a menos. Então eu fiz a soma, porque fala que ele é mais velho que ela. (B32)

Soma 5 mais 4, porque ela tinha 5 anos e ele era mais velho 4 anos.(A5)

Podemos observar que 5 alunos optaram pela subtração para resolver o problema, porque ela tem 4 anos a menos, ou seja, basearam-se na expressão literal " a menos".

As respostas dos alunos, quando questionados sobre como poderiam comprovar a resolução correta do problema 3.5 da relação Comparação de Estados, estão apresentadas a seguir.

Tabela 21- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 3.5 da relação Comparação de estados

Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fazendo uma conta de mais porque ele é mais velho	6	7	8	21
Fazendo uma conta de menos	2	1		3
Acho que fiz errado			1	1
Colocando o sinal		1		1
Não sei resolver	1			1
Total	9	9	9	27

Na tabela 21, observamos que 21 dos 27 alunos afirmaram que o tipo de verificação da resolução está correta porque fizeram uma conta de mais, centrados na idéia de que irmão é mais velho, logo tem mais idade.

Porque se fosse subtração ele vai ficar com 1 ano e Leila tem 4 anos a menos. (C49)

Porque ele tem 4 anos a mais que ela. Então tem que somar. (A5)

É de mais, porque Leila tem 4 anos a menos. (B23)

Podemos verificar que somente 3 alunos optaram pela subtração para resolver o problema.

Um aluno da escola C demonstrou-se confuso ao perceber que ao fazer a subtração obteve a idade de 1 ano: *Mas eu acho que tá errado, porque se ela tem 4 anos a menos que o irmão dela e ela tem 5 anos. Eu não estou entendendo. Como que eu vou saber a idade do irmão dela. Acho que ao invés de ser ela tem 5 anos, tinha que ser ele tem 5 anos. Aí, estaria certo 5 menos 4. (C45)*

Na tabela 22, apresentaremos as respostas dos alunos quando questionados sobre a possibilidade de haver uma outra maneira para resolver o problema 3.5 da relação Comparação de Estados.

Tabela 22- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 3.5 da relação Comparação de estados

Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei		2	1	3
Não	Não sem justificativa	5	2	6	13
	Não, porque vai dar outro resultado	1	2		3
	Não, porque ela tem 4 anos a menos	1	2		3
Sim	Invertendo	1	1	2	4
	Não soube resolver	1			1
	Total	9	9	9	27

Verificamos que dos 27 alunos entrevistados, 19 afirmaram que não existe uma resolução alternativa para o problema descrito. Sendo que destes, 13 não apresentaram justificativas para tal; 3 apontam que outra resolução dará um outro resultado e 3 afirmaram que não porque ela tem anos a menos.

Observamos pela tabela 22, que dos 6 alunos que conseguem expor os motivos que impedem o problema de admitir uma outra resolução, 4 pertencem à escola B e usaram argumentos do tipo:

Não, porque não vai ter o mesmo resultado. (B26)

Não, porque o único é 5 mais 4. (B25)

Podemos observar que 4 alunos alegaram existir uma outra forma de resolução desde que haja inversão dos números no algoritmo. Exemplo:

Dá! Colocando ao contrário, 4 mais 5. (A5)

Problemas da relação Composição de duas transformações

Problema 4.1- Eduardo disputou “bafo” duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?

A freqüência de respostas certas e erradas dos alunos, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 4.1 da relação Composição de duas transformações, estão descritas a seguir.

Tabela 23- Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 4.1 da relação Composição de duas transformações
Eduardo disputou "bafo" duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?

Operação realizada	**Justificativas**	**Escolas**							
		A		**B**		**C**		**Total**	
		C	E	C	E	C	E	C	E
Adição	Fiz uma conta de mais para ver quantas tinha		4		1		1		6
Subtração	Diminui porque perdeu	4		6		6	1	16	1
Multiplicação	Coloquei o sinal de vezes, porque 5 não dá para tirar 7		1		1				2
	Total	4	5	6	2	6	2	16	9
	Não soube resolver			1		1			2

A tabela 23 aponta que, dos 27 entrevistados 9 apresentaram uma solução errada e 2 não souberam resolver este problema. Destes 9 alunos, 6 alegaram que fizeram uma conta de mais para ver quantas figurinhas Eduardo dispunha antes de jogar, 1 apesar de alegar que diminui porque perdeu, errou a resolução e 2 optaram pela multiplicação porque 5 não dá para tirar 7. Algumas falas dos alunos ilustram esses tipos de resposta:

Eu pensei em fazer duas contas: 7 mais 5 para ver quantas ele tinha antes e depois eu fiz 12 menos 7 para ver com quantas ele tinha ficado. (C39)

Eu não consigo resolver porque 5 não dá para tirar 7. Então, não pode ser de menos. Tem que ser 5 vezes 7, porque 5 menos 7 não dava. (A6)

Podemos constatar por um lado, que dos 9 que solucionaram erroneamente, 5 pertencem à escola pública.

Descreveremos na seqüência as respostas dos alunos quando questionados sobre como poderiam provar que a resolução apresentada para o problema 4.1 da relação Composição de duas transformações estava correta.

Tabela 24- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 4.1 da relação Composição de duas transformações

Eduardo disputou “bafo” duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fazendo uma conta de mais	3	1	1	5
Tirando 7 de 5	4	6	3	13
Fiz de menos para saber quanto 7 é maior que 5			1	1
Fazendo 5 menos 7		1	1	2
Não sei explicar	1	1	2	4
Fiz do jeito mais fácil	1			1
Não sei resolver			1	1
Total	9	9	9	27

A tabela 24 mostra que, dos 27 alunos, 5 afirmaram que fazendo uma conta de mais poderiam chegar a uma resolução certa; 13 afirmaram que a resolução estava correta porque haviam tirado 7 de 5. Cabe ressaltar que a justificativa dos alunos corresponde a seqüência dos números no algoritmo. Desses, 6 pertencem à escola B, 4 à escola A e 3 à escola C, demostrando que a escolha da subtração não foi aleatória. Exemplo:

Porque aqui é de menos. Na primeira vez ele ganhou 5 figurinhas e na segunda ele perdeu 7. É de menos, porque na segunda ele perdeu 7 figurinhas. (B23)

A tabela 25, a seguir, apresenta as respostas dos alunos quando questionados sobre a possibilidade de haver uma outra forma para resolver o problema 4.1 da relação Composição de duas transformações.

Tabela 25- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 4.1 da relação Composição de duas transformações

Eduardo disputou "bafo" duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	Não sei		1	2	3
Não	Não sem justificativa	6	1	4	11
	Acho que só tem essa forma		1		1
	Não, porque vai dar outro resultado	2	1	2	5
	Não, tem que ser de menos porque perdeu		4		4
Sim	Invertendo	1	1		2
	Não consigo resolver			1	1
	Total	9	9	9	27

Verificamos que 21 dos 27 alunos entrevistados afirmaram não existir uma resolução alternativa para o problema 4.1. Desses, 11 não apresentaram justificativa para essa resposta; 1 afirmou que só existe a forma apresentada por ele; 5 apontaram que outra forma daria outro resultado e 4 destacaram que tem ser de menos porque houve uma perda.

Problema 4.3- Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

As resoluções certas e erradas dos alunos, quanto à operação realizada e respectivas justificativas em relação ao problema 4.3 da relação Composição de duas transformações, são apresentadas a seguir.

Tabela 26- Freqüência de respostas conforme as escolas pesquisadas, quanto à operação realizada e respectivas justificativas na resolução do problema 4
4.3 da relação Composição de duas transformações
Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

Operação realizada	**Justificativas**	**Escolas**							
		A		**B**		**C**		**Total**	
		C	E	C	E	C	E	C	E
Adição	Se de menos não dava, passei para de mais				1		1		2
	Somei		6			1	1	1	7
Adição e subtração	Somei 13 mais 6 e depois tirei 19 menos 1				1				1
Subtração	O problema disse que era de menos, porque perdeu	2	1	4		5		11	1
Multiplicação	Coloquei o sinal de vezes, porque é mais fácil				1				1
	Total	2	7	4	3	6	2	12	12
	Não soube resolver			2		1		3	

Observamos na tabela 26 que este problema gerou dificuldade para a maioria dos alunos, pois dos 27 alunos, 12 apresentaram resoluções erradas e 3 não souberam resolver o problema. Dentre os 12 alunos, 9 optaram pela adição; 1 realizou uma adição e depois uma subtração; 1 optou pela subtração, mas calculou errado e o último fez uma multiplicação. Algumas falas exemplificam esses resultados:

Pensei assim, se de menos não dava, porque estava perguntando 6 menos 13 e daí dava 13. Então passei para mais. (B19)

Como eu vou saber se ele ganhou ou perdeu se eu não sei o total de figurinhas. Eu preciso saber o total para diminuir 13 (B25)

Percebemos que para os alunos da escola A o problema 4.3 gerou uma maior dificuldade: dos 9 alunos entrevistados, 7 apresentaram resoluções erradas, sendo que 6 destes efetuaram uma adição.

Em relação aos alunos que não souberam resolver, observamos que 2 pertencem à escola B e 1 à escola C.

Podemos verificar que em relação aos 12 alunos que obtiveram êxito na resolução, 11 optaram pela subtração porque o problema dizia que houve uma perda e 1 apesar de afirmar que fez uma adição, efetuou uma subtração.

Na tabela 27 , a seguir, estão descritas as respostas dos alunos quando questionados sobre como poderiam comprovar que a resolução apresentada por eles, para o problema 4.3 da relação Composição de duas transformações, estava certa.

Tabela 27- Freqüência de tipos de estratégias indicadas para a verificação do problema 4.3 da relação Composição de duas transformações

Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

	Escolas			
	A	**B**	**C**	**Total**
Fazendo uma conta de mais	6	2	3	11
Fazendo uma conta de menos porque ele perdeu	2	4	5	11
Colocando o sinal de vezes		1		1
Fazendo 6 menos 13	1			1
Não sei resolver		2	1	3
Total	9	9	9	27

Verificamos que para 22 alunos a comprovação da veracidade da resolução acontece, por um lado, efetuando uma conta de adição e por outro realizando uma conta de subtração. Destes alunos, 8 pertencem à escola A, 6 à escola B e 8 à escola C.

Em relação às outras explicações, apenas 1 aluno (escola B) afirma que é possível obter a resposta certa colocando o sinal de vezes e 1 outro (escola A) que a comprovação se dará fazendo 6 menos 13.

As respostas dos alunos, quando questionados sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa para o problema 4.3 da relação Composição de duas transformações estão relatadas na tabela seguinte.

Tabela 28- Freqüência da presença de resolução alternativa para o problema 4.3 da relação Composição de duas transformações

Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

		Escolas			
		A	**B**	**C**	**Total**
	• Não sei	1	2	1	4
• Não	• Não, sem justificativa	6		6	12
	• Não, tem que ser de menos porque perdeu		3		3
	• Não, porque vai dar outro resultado	2	2		4
• Sim	• Fazendo a prova real			1	1
	• Não consigo resolver		2	1	3
	Total	9	9	9	27

A tabela 28 aponta que para 19 alunos não existe uma resolução alternativa para o problema 4.3. Desses alunos, 12 não souberam justificar o porquê da não existência; 3 afirmaram que tem que ser de menos porque o problema anuncia uma perda e 4 afirmaram que uma outra resolução iria gerar um resultado diferente.

Podemos verificar que 4 alunos não souberam dizer se existe uma resolução alternativa para o problema e apenas 1 afirmou que a prova real seria uma outra possibilidade para resolvê-lo.

Dos 9 alunos da escola B, 5 conseguiram expor os motivos que não possibilitam uma outra forma de resolução para o problema, como exemplifica a fala:

Não, porque o problema está falando que é conta de menos. Ele perdeu... ele percebeu que havia perdido 13. Se perdeu é conta de menos. (B23)

No caso dos alunos das escolas A e C, 12 alunos, divididos igualmente entre as escolas, não souberam justificar a negativa em haver uma outra forma de resolver o problema.

Síntese dos resultados das entrevistas

Os dados coletados nas entrevistas e nas observações realizadas nos forneceram alguns elementos para tentarmos responder à questão central do nosso trabalho: Que tipo de problema de estrutura aditiva gera dificuldade para os alunos de 3ª série do Ensino Fundamental? E qual é a dificuldade?

Apresentaremos uma síntese dos resultados obtidos para uma das relações de base representadas pelos problemas, destacando pontos que nos chamaram a atenção, tanto nas tabelas descritas, quanto nas observações realizadas durante a aplicação da prova individual e durante as entrevistas.

A tabela 29, a seguir, aponta o quadro geral de freqüência de respostas certas, erradas e sem solução dos 27 alunos entrevistados, separados por escolas.

Tabela 29- Freqüência geral de respostas dos alunos conforme as escolas, quanto ao tipo de problema de estrutura aditiva

Relações de base de dos problemas de estrutura aditiva		Escolas											
		A			B			C			Total		
		C	E	N	C	E	N	C	E	N	C	E	N
1.Parte-parte-todo	1.1	4	5		8	1		9			21	6	
	1.2	7	2		6	3		8	1		21	6	
2. Transformação de Estados	2.2c	8	1		8	1		9			25	2	
	2.6	5	3	1	5	4		7	2		17	9	1
3. Comparação de Estados	3.1	8	1		7	2		9			24	3	
	3.4	5	3	1	6	3		7	2		18	8	1
	3.5	6	2	1	7	2		8	1		21	5	1
4. Composição de Duas Transformações	4.1	4	5		6	2	1	6	2		16	9	2
	4.3	2	7		4	3	2	6	2		12	12	3

As letras C, E e N que aparecem na tabela correspondem, respectivamente a Certo, Errado Nãoão soube resolver.

Podemos verificar que os problemas da relação Parte-parte-todo não produziram grandes dificuldades para a maioria dos alunos, a não ser para os alunos da escola A. Entretanto, a quantidade de erros de tal escola não está relacionada à dificuldade em escolher a operação correta para resolver o problema 1.1 desta relação, mas a troca de operações no momento do cálculo. Nesses casos, os alunos optaram pela adição e efetuaram uma subtração.

Em relação ao problema 1.2, percebemos que a dificuldade dos alunos não estava relacionada à escolha da operação, mas ao entendimento do contexto do problema. O que pôde ser constatado pela necessidade dos alunos durante a entrevista em ler o problema várias vezes antes de decidir como calcular. Observamos que 5 alunos optaram pelo cálculo mental para resolver o problema, sendo que destes nenhum pertence à escola C.

Ao observarmos o desempenho dos alunos na resolução dos problemas que envolvem a relação Transformação de estados, notamos que o problema 2.2 não gerou dificuldade no momento de resolver, nem sequer de escolher a operação que iriam utilizar. Dos 27 alunos entrevistados, 23 decidiram rapidamente pela subtração. Já o problema 2.6 ocasionou uma certa dificuldade advinda, por um lado, pela presença da expressão "perdeu" no problema que influenciou alguns alunos a optarem pela subtração,por outro, pela ausência do estado inicial.

Considerando as respostas erradas dos problemas da relação Comparação de estados, percebemos que o problema 3.4 foi o mais difícil dessa relação. Podemos inferir que essa dificuldade pode estar relacionada à presença da expressão "a mais" no enunciado do problema, tendo em vista que a operação a ser realizada era a subtração.

Em relação ao problema 3.1, a presença dessa mesma expressão serviu de apoio para a maioria das crianças optarem pela adição, o que foi expresso claramente pelos alunos no momento de justificar a escolha da operação.

Por outro lado, é interessante notar que no problema 3.5 a expressão "a menos" não influenciou um grande número de alunos na escolha da operação, sendo que a maioria justificou que fez adição porque Leila é menor que o irmão dela.

Observando o desempenho dos alunos na resolução dos problemas 4.1 e 4.3 da relação Composição de duas transformações percebemos que, em relação aos demais problemas, esses foram os que mais originaram respostas erradas.

Em relação às estratégias indicadas para a verificação dos problemas, observamos que para os problemas da relação Parte-parte-todo as afirmações dos alunos condiziam com as definições dadas por Vergnaud. No caso do problema 1.1 tinha que somar para saber quantos os dois tinham juntos e do problema 1.2 é preciso tirar do total a parte conhecida para descobrir a desconhecida.

Quanto aos problemas da relação Transformação de estados, verificamos que a estratégia mais recorrente do problema 2.2 está relacionada à subtração, pois houve um gasto. Já para o problema 2.6 observamos que alguns alunos fizeram "de menos" porque o envoltório indica uma perda: "Carlos perdeu..."

Observamos que para alguns alunos as estratégias indicadas para a resolução dos problemas 3.1 e 3.4 da relação Comparação de estados pela adição estavam relacionadas à expressão "a mais". Em relação ao problema 3.5 a expressão "a menos" parece não ter influenciado a maioria dos alunos na escolha da subtração.

Quanto aos tipos de estratégias indicadas para a verificação da resolução dos problemas 4.1 e 4.3 da relação Composição de duas transformações, observamos que *para* os dois problemas alguns alunos afirmaram que, utilizando a adição a ausência de um estado inicial seria preenchida.

Em relação à possibilidade de haver uma resolução alternativa para os problemas, a maioria dos alunos afirmou que não existe uma possibilidade diferente da apresentada, porém não conseguiam justificar o porquê disso. Essa freqüência foi evidenciada em todos os problemas apresentados. Alguns alunos apresentaram a inversão e a prova real como uma outra possibilidade de resolução.

De forma geral, constatamos que a partir do momento que o problema passa a apresentar um grau de dificuldade maior, dada pela redação do problema, pela relação matemática a ser pensada, pela diferença entre a seqüência temporal e a seqüência da operação matemática ou pela diferença entre o cálculo mental e o algoritmo, a quantidade de acertos diminuiu.

Comparação entre as respostas dos alunos nas provas coletiva e individual, referentes às três escolas

Apresentaremos, a seguir, uma tabela com dados comparativos entre as respostas dos alunos nas provas coletiva e individual, na tentativa de visualizar se houve diferença no desempenho dos mesmos.

Tabela 30- Comparação da freqüência de respostas nas provas coletiva e individual, conforme as escolas, quanto ao tipo de problema de estrutura aditiva

Relação dos problemas de estrutura aditiva		Escolas A Coletivo C	E	N	A **Individual** **C**	**E**	**N**	B Coletivo C	E	N	B **Individual** **C**	**E**	**N**	C Coletivo C	E	N	C **Individual** **C**	**E**	**N**	TOTAL Coletivo C	E	N	TOTAL **Individual** **C**	**E**	**N**
1.Parte-parte-todo	**1.1**	6	3		**4**	**5**		4	5		**8**	**1**		9			**9**			19	8		**21**	**6**	
	1.2	4	4	1	**7**	**2**		5	3	1	**6**	**3**		9			**8**	**1**		18	7	2	**21**	**6**	
2. Transformação de Estados	**2.2**	7	2		**8**	**1**		6	3		**8**	**1**		9			**9**			22	5		**25**	**2**	
	2.6	7	1	1	**5**	**3**	**1**	5	4		**5**	**4**		8	1		**7**	**2**		20	6	1	**17**	**9**	**1**
3. Comparação de Estados	**3.1**	7	1	1	**8**	**1**		8	1		**7**	**2**		9			**9**			24	2	1	**24**	**3**	
	3.4	6	3		**5**	**3**	**1**	5	4		**6**	**3**		9			**7**	**2**		20	7		**18**	**8**	**1**
	3.5	7	1	1	**6**	**2**	**1**	4	4	1	**7**	**2**		6	3		**8**	**1**		17	8	2	**21**	**5**	**1**
4. Composição de Duas Transformações	**4.1**	2	5	2	**4**	**5**		4	4	1	**6**	**2**	**1**	5	2	2	**6**	**2**	**1**	11	11	5	**16**	**9**	**2**
	4.3	0	8	1	**2**	**7**		4	2	3	**4**	**3**	**2**	4	4	1	**6**	**2**	**1**	8	14	5	**12**	**12**	**3**
Média de acertos			**5.1**			**5.4**			5			**6.3**			7.5			**7.6**			17.6			**19.4**	

Ao compararmos os resultados nas provas coletiva e individual para cada uma das relações, representadas nos problemas podemos observar algumas variações.

A tabela 30 mostra que o número de acertos dos problemas da relação Parte-parte-todo na prova individual aumentou, a não ser para o problema 1.1 desta relação, no qual os alunos da escola A tiveram mais acertos na prova coletiva do que no individual.

Nos problemas da relação Transformação de estados a quantidade de acertos, da prova coletiva para a individual, aumentou para o problema 2.2 e diminuiu para o problema 2.6. A diminuição ocorreu mais uma vez com os alunos da escola A e C, de 7 para 5 e de 8 para 7, respectivamente. Observamos que nesta relação o problema 2.6 gerou um menor número de respostas certas, tanto na coletiva quanto na individual, quando comparado ao problema 2.2.

Dos 3 problemas da relação Comparação de estados, o problema 3.1 foi o único que manteve a quantidade de acertos. Já o problema 3.4 teve uma diminuição na quantidade de respostas certas, de 20 para 18 e o problema 3.5 sofreu um acréscimo, passando de 17 para 21 acertos.

Podemos observar que os problemas da relação Composição de duas transformações, tanto na prova coletiva como na individual, foram os que menos apresentaram respostas corretas. Contudo, é possível verificar um acréscimo de acertos na prova individual em relação à coletiva. Em relação ao problema 4.1, o número de acertos passou de 11 para 16 e no problema 4.3 o aumento foi de 8 para 12.

Em síntese, se analisarmos o desempenho geral dos alunos das três escolas houve uma diferença entre as duas aplicações, com uma quantidade de acertos maior no individual. Porém, a variação de acertos da coletiva para a individual ficou entre 7% e 15%. A não ser em relação aos problemas 2.6 e 3.4 que o desempenho foi melhor na prova coletiva do que na individual e no caso da relação 4.1, que houve um maior número de *acertos, cerca de 19%, na individual em relação à coletiva.*

Ao compararmos o desempenho das escolas, pela quantidade de respostas certas, verificamos na tabela 30, que a escola C destacou-se tanto na prova coletiva quanto na individual, seguida pela escola B. A escola A apresentou uma diferença mínima na quantidade de acertos em relação B, ficando com desempenho abaixo das demais escolas.

Comparação entre a freqüência de problemas no material didático e os acertos na resolução dos problemas

Apresentaremos, a seguir, uma tabela comparativa entre a quantidade dos problemas aditivos nos materiais didáticos analisados e selecionados para as provas coletiva e individual, e o total de acertos da prova individual das três escolas.

Tabela 31- Comparação entre a freqüência dos problemas aditivos nos materiais didáticos analisados e o total de acertos apresentados na prova individual

Relação dos problemas aditivos		Materiais	Acertos
1.Parte-parte-todo	1.1	48	21
	1.2	17	21
2.Transformação de estados	2.2	13	25
	2.6	0	17
3. Comparação de estados	3.1	5	24
	3.4	33	18
	3.5	0	21
4.Composição de duas transformações	4.1	0	16
	4.3	0	12

Os dados da tabela 31 mostram que forma geral, não se pode dizer que há uma relação entre a freqüência dos problemas no material didático e os acertos na resolução dos problemas apresentados neste estudo, tendo em vista que essa relação se fez de modo particular para cada um dos casos. Aspecto que pode também ser evidenciado ao observarmos a tabela 32, que apresenta uma comparação entre a freqüência dos *problemas* aditivos analisados e selecionados para as provas coletiva e individual e o total de acertos apresentados na prova individual para cada uma das escolas envolvidas.

Tabela 32- Comparação entre a freqüência dos problemas aditivos nos materiais didáticos analisados e o total de acertos apresentados na prova individual pelos alunos das escolas envolvidas

Relação dos problemas aditivos		**Escola A**		**Escola B**		**Escola C**	
		Livro	Acertos	Apostila	Acertos	Livro	Acertos
1. Parte-parte-todo	1.1	30	4	18	8	30	9
	1.2	8	7	9	6	8	8
2. Transformação de estados	2.2	12	8	1	8	12	9
	2.6	0	5	0	5	0	7
3. Comparação de estados	3.1	3	8	2	7	3	9
	3.4	12	5	21	6	10	7
	3.5	0	6	0	7	0	8
4. Composição de duas transformaçõees	4.1	0	4	0	6	0	6
	4.3	0	2	0	4	0	6

Podemos verificar, a partir dos dados da tabela 31 uma grande quantidade de problemas da relação Parte-parte-todo presentes nos materiais analisados e um bom desempenho dos alunos na resolução destes problemas.

Em relação aos problemas da relação Transformação de estados constatamos uma ausência de problemas da categoria 2.6 e um desempenho baixo dos alunos, no teste individual, em relação ao problema desta categoria.

Quanto aos problemas da relação Comparação de estados percebemos que, apesar dos materiais apresentarem uma maior quantidade de problemas da categoria 3.4, o total de acertos foi o menor. Isso pode ter ocorrido pela presença de uma expressão diferente da relação matemática a ser pensada para resolver o problema.

Verificamos a ausência tanto do problema da categoria 4.1 como da categoria 4.3 da relação Composição de duas transformações nos materiais analisados, o que pode ter influenciado o baixo desempenho dos alunos na resolução dos problemas desta categoria.

CAPÍTULOV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Tendo em vista que a pesquisa teve como objetivo a análise da resolução de problemas de estruturas aditivas por alunos de 3ª série do Ensino Fundamental, a análise dos dados obtidos será realizada com o intuito de identificar que tipos de problemas apresentaram dificuldades para os alunos, bem como os prováveis aspectos, de ordem cognitiva ou didática, que as condicionaram.

A partir dos resultados encontrados e tomando como base o referencial teórico apresentado nos capítulos I e II, destacamos alguns aspectos essenciais para compreender a natureza e as dificuldades da resolução de problemas de estrutura aditiva apresentadas pelos alunos de um modo geral.

Aspectos cognitivos envolvidos na resolução de problemas:

- os esquemas envolvidos na resolução do problemas aditivos;
- relação entre o cálculo mental e o algoritmo;
- relação entre linguagem e a operação.

A natureza dos problemas apresentados:

- contexto presente nos problemas de estrutura aditiva;
- relação de base que os problemas contemplam;

– seqüência temporal;

Aspectos didáticos:

- natureza e freqüência dos problemas nos manuais de Matemática utilizados como materiais didáticos.

Conduziremos a análise apresentando a natureza dos problemas e os aspectos cognitivos envolvidos na resolução paralelamente, relativos aos resultados das aplicações das provas coletiva e individual e por fim os aspectos didáticos, decorrentes do estudo realizado com os materiais didáticos na tentativa de estabelecer uma relação entre a freqüência de problemas nos manuais de Matemática usados como materiais didáticos e o desempenho dos alunos nas provas.

1. Análise dos dados coletados na aplicação das provas coletiva e individual

A análise dos resultados obtidos nos permite traçar um panorama do desempenho dos alunos na resolução dos problemas. Como não exercíamos nenhuma influência direta sobre a resolução dos problemas, podemos afirmar que o desempenho dos alunos apresentou estreita relação com as duas classes de situações, mencionadas por Vergnaud (1990), com as quais esses entram em contato:

> 1) classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
>
> 2) classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (p.2).

Tomando como referência os resultados obtidos, identificamos essas duas classes de situações, atuando de maneira distinta nas três escolas envolvidas. Podemos afirmar que a primeira classe de situações compreendeu os problemas que apresentaram a quantidade de acertos apresentados, variando entre 77,7% e 100% :

- escola pública / livro didático: dos 9 problemas que compuseram a prova, 3 podem ser enquadrados nessa classe de situações: problema 1.2 da relação Parte-parte-todo, problema 2.2 da relação Transformação de estados e problema 3.1 da relação Comparação de estados.

- escola particular / material apostilado: essa classe de situações abrangeu 4 dos 9 problemas: problema 1.1 da relação Parte-parte-todo, problema 2.2 da relação Transformação de estados e problemas 3.1 e 3.5 da relação Comparação de estados.

- escola particular / livro didático: a referida classe de situações envolveu 7 dos 9 problemas: problemas 1.1 e 1.2 da relação Parte-parte-todo, problemas 2.2 e 2.6 da relação Transformação de estados e problemas 3.1, 3.4 e 3.5 da relação Comparação de estados.

A segunda classe de situações é constituída por problemas que apresentaram acertos variando entre 0% e 66,6%:

- escola A (pública / livro didático): dos 9 problemas que compuseram a prova, 6 podem ser enquadrados nessa classe de situações: problema 1.1 da relação Parte-parte-todo, problema 2.2 da relação Transformação de estados e problemas 3.4 e 3.5 da relação Comparação de estados e problemas 4.1 e 4.3 da relação Composição de duas transformações

- escola B (particular / material apostilado): essa classe de situações abrangeu 5 dos 9 problemas: problema 1.2 da relação Parte-parte-todo, problema 2.6 da relação Transformação de estados e problema 3.4 da relação Comparação de estados e problemas 4.1 e 4.3 da relação Composição de duas transformações

- escola C (particular / livro didático): a referida classe de situações envolveu 2 dos 9 problemas: problemas 4.1 e 4.3 da relação Composição de duas transformações;

1.1 A natureza dos problemas e os aspectos cognitivos envolvidos na resolução

Em relação aos problemas da relação Parte-parte-todo, podemos afirmar que os erros apresentados estão relacionados à troca da operação no momento da resolução, tanto para o problema 1.1 como para o 1.2. Os alunos registraram adição e efetuaram subtração, não havendo conexão entre o cálculo mental e o algoritmo registrado. Vergnaud (1990) aponta que os algoritmos são esquemas e como tal, são eficazes, mas nem sempre efetivos, como pudemos perceber. A confiabilidade no esquema escolhido pelos alunos não permitiu que percebessem o erro cometido, como pode ser observado na transcrição da seguinte entrevista:

Pesquisadora: Conta a história do problema.
B25: *Que um elefante pesava 4000 quilogramas, mas o seu filhote não pesava o mesmo, pesava 1700 quilogramas. Quantos pesam os dois juntos?*
Pesquisadora Como você pensou para resolver o problema?
B25: *Eu pensei somando 4000 mais 1700.*
Pesquisadora Qual a pergunta do problema?
B25: *Quantos quilogramas pesam os dois juntos?*
Pesquisadora Qual a resposta?
Os dois juntos pesam 2300.
Pesquisadora Como você pode saber que essa forma que você escolheu para resolver responde à pergunta do problema?
B25: *Somando, porque os dois juntos é mais, um mais o outro.*
Pesquisadora Você acha que dá para resolver o problema de outro jeito? Tem um outro jeito para resolver esse problema?

B25: *Não, porque somando que é os dois juntos.*

Apesar do erro na resolução do algoritmo, destacamos que a escolha da operação adição foi facilitada pelo contexto desse problema, com a presença da expressão *os dois juntos* na pergunta, diretamente relacionada à adição, proporcionando fácil entendimento e tratamento aditivo adequado, como pode ser percebido nas transcrições abaixo:

Simples, ele está perguntando quanto os dois juntos, significa que tem que somar. Com certeza. (B19)

Tá perguntando quanto pesam os dois juntos, tem que fazer a conta de mais. Tem que ser de mais porque quer saber quanto pesam os dois juntos. (A3)

Quanto ao desempenho das escolas destacamos que a maior dificuldade foi relacionada à troca da operação no momento da resolução, apresentada por 55, 5% dos alunos da escola A (pública / livro didático).

Porém, o contexto do problema 1.2[8] dificultou a compreensão para 8 alunos, ou seja, cerca de 30%. Esses alunos não conseguiram se colocar na história do problema e depois que terminaram de ler perguntavam: Juntos quem? Um aluno chegou a afirmar:

Eu não economizei nada, pois lá em casa ... (A1)

Destacamos também que a presença do verbo economizei no contexto desse problema sugeriu adição para 18% dos alunos, sendo que a metade desses pertenciam a escola B. Um teorema-em-ato falso, que ocasionou a escolha de uma operação que não correspondia à operação a ser efetuada:

[8] Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

Pesquisadora: Conta a história do problema.
B23: *Os meninos juntos conseguiram economizar 750 reais e o outro falou assim: Eu economizei 340 reais, e você?*
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o problema?
B23: *Tá aqui. Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você? A conta é de mais porque aqui tá economizei. Fiz errado! Porque...*
Pesquisadora: Leia de novo o problema.
B23: *É conta de mais mesmo, porque aqui é economizei.*
Pesquisadora: Qual a pergunta do problema?
B23: *Eu economizei 340 reais, e você?*
Pesquisadora: Qual a resposta?
B23: *Dez e noventa.* (Apresenta mais uma vez dificuldade em ler os número, pois o resultado é 1090)
Pesquisadora: Como você pode saber que essa forma que você escolheu para resolver responde à pergunta do problema?
B23: **(Busca uma palavra no texto para explicar)** *Porque é economizei.*
Pesquisadora: Você acha que dá para resolver o problema de outro jeito? Tem um outro jeito para resolver esse problema?
B23: *Dá. De menos.*
Pesquisadora Mas para responder essa pergunta dá para resolver de outra forma?
B23: *Não! Porque aqui é economizei.*

A busca pela palavra-chave percebida no momento da entrevista constitui-se um dos aspectos destacados por Vasconcelos (1998) sobre a prática de ensino e sobre o conteúdo dos livros didáticos. Recurso muitas vezes usado para tentar evitar a famosa dúvida: 'é de mais ou de menos?' que, segundo a autora " permite que diversos tipos de problemas sejam resolvidos pelas crianças. No entanto, essa resolução é fruto não da compreensão das relações entre os dados do problema, mas, sim, da 'dica' da palavra-chave" (p.55).

Em se tratando dos problemas 2.2 e 2.6 da relação Transformação de estados os verbos dos enunciados também exerceram influência na escolha da operação, determinando um aumento ou redução na quantidade de resoluções certas. Destacamos que para o problema 2.2[9] a congruência semântica entre o verbo gastou do enunciado e o sentido da operação subtração a ser efetuada correspondeu a uma regra de ação do tipo "se... então..." recorrente para 88,8% dos alunos. O teorema-em-ato expresso por essa regra de ação foi verdadeiro, como mostra a justificativa abaixo:

Eu só fiz 360 que ela tinha menos os 120 que ela gastou, fiz de menos porque ela gastou 120. (C 51)

Ué, é fazendo conta de menos, porque o problema está dizendo que ***ela gastou, então tem que fazer conta de menos****.(A2)*

Segundo Vergnaud (1982) este problema constitui-se no primeiro conceito de subtração para uma criança, tendo "uma quantidade inicial que decresce com o gasto, perda ou venda" (p.2).

Pelos resultados obtidos, os alunos das três escolas envolvidas, provavelmente, adquiriram esse primeiro conceito, tendo em vista que o melhor desempenho foi apresentado na resolução deste problema da relação transformação de estados.

Em relação ao problema 2.6[10] a presença do verbo perdeu no contexto influenciou 22,2% dos alunos a escolherem a operação subtração, apesar de não haver congruência entre o verbo e a operação a ser realizada.

Eu coloquei 35 menos 12, que deu 24, porque o problema fala que Carlos perdeu 35 figurinhas, aí tem que fazer conta de menos. (A4)

[9] Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?
[10] Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?

Fiz uma conta de menos. Eu peguei 35 menos 12. Carlos perdeu 35. Perdeu é menos. (B23)

Podemos destacar a presença de uma regra de ação do tipo "se... então..." marcada pelo advérbio *antes* na pergunta, expressando um teorema-em-ato verdadeiro: se quer saber antes é porque ainda não jogou então tem que somar porque ele ainda tem 35 figurinhas. Tal afirmação pode ser percebida nas transcrições a seguir:

Tá perguntando quantas ele tinha antes de jogar e se ele perdeu 35 e ficou com 12 eu tenho que fazer conta de mais para saber quantas ele tinha.(C44)

Eu pensei que tinha que ser de mais, porque se ele perdeu 35 ele tem agora 12, tem que ser de mais para ver quanto ele tinha antes.(A12)

Uma diferença entre estes dois problemas da relação Transformação de estados que compuseram a prova e que torna o primeiro problema mais fácil que o segundo é apontada Vergnaud (1996) ao afirmar que

> no primeiro problema conhecemos o estado inicial, conhecemos a transformação e procuramos o resultado final. Enquanto que no segundo problema nós conhecemos o resultado final e a transformação mas procuramos o estado inicial. Então, nesse momento é preciso juntar (adicionar) as bolinhas perdidas. Ou seja, apesar do fato de a criança ter perdido as bolinhas é preciso fazer uma soma (adição). E, de outro lado, há um teorema em ato que diz que é preciso juntar (adicionar) as bolinhas perdidas para se chegar ao estado inicial (p.17).

De acordo com os resultados obtidos pudemos perceber o quanto o problema 2.6 foi mais difícil, principalmente para os alunos das escolas A e B, tendo em vista a quantidade de acertos referente à 55,5%.

Analisando os resultados obtidos durante a resolução dos problemas da relação Comparação de estados podemos afirmar que a presença de palavras-chave, muito provavelmente, influenciou a escolha da operação a ser utilizada.

Em relação ao problema 3.1[11] o teorema-em-ato subjacente de que é preciso fazer uma soma foi verdadeiro para a situação posta. A congruência entre a expressão *a mais* e a operação a ser realizada, nesse caso, proporcionou 88,8% de respostas corretas. O que nos permite afirmar que esse problema não ofereceu grandes dificuldades para os alunos das três escolas envolvidas.

Podemos observar a presença deste teorema-em-ato na justificativa abaixo:

Pesquisadora: **Como você pensou para resolver o problema?**
B32: *Eu pensei assim: aqui fala assim que ela tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Aí eu somei 4 mais 3.*
Pesquisadora: Qual a pergunta do problema?
B32: *Quantas bonecas tem Flávia?*
Pesquisadora: Qual a resposta?
B32: *Ela tem 7 bonecas.*
Pesquisadora: Como você pode saber que essa forma que você escolheu para resolver responde a pergunta do problema?
B32: *Porque ela tem 3... aqui falou que ela tem 3 a mais que Amanda que tem 4. Eu pensei 4 mais 3 é igual a 7.*
Pesquisadora: Você acha que dá para resolver o problema de outro jeito? Tem um outro jeito para resolver esse problema?
B32: *Acho que sim, 3 mais 4.*

Para o problema 3.4[12] , em que não há congruência entre a expressão a mais e a operação a ser realizada a quantidade de acertos foi menor (66,6%), principalmente para os alunos da escola A.

Do ponto de vista desenvolvimentista, o problema é mais difícil, pois apresenta uma contradição entre o enunciado do problema e a concepção do aluno: a mais tem que somar. "Em outras palavras, a relação entre linguagem e pensamento é muito complicada" (VERGNAUD, 1996, p.18). Pois este problema traz um caso de subtração completamente contra-intuitivo, isto é, fazer uma subtração, quando o contexto do problema sugere uma adição, como mostra a justificativa abaixo:

---

[11] Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?
[12] José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?

Colocar assim 34 mais 12 para ver o resultado e resolver o problema, porque o pai do Paulo tinha 34 e o Paulo tinha 12. A pergunta é quantos anos José tem a mais que Paulo. Tem que somar. (A5)

No caso do problema 3.5[13], a relação entre linguagem e pensamento foi resolvida por 74% dos alunos com regra de ação do tipo "se... então..." que expressa um teorema-em-ato que diz que é preciso fazer uma adição para descobri a idade de Pedro, pois este é mais velho que Leila. Tal afirmação pode ser percebida nas justificativas a seguir:

Eu pensei na idade dela e no que diz que é 4 anos a menos. Então eu fiz soma, porque fala que ele é mais velho que ela. (B32)

Tá perguntando quantos anos tem Pedro. Só que a Leila tem 4 anos a menos que seu irmão. Ela tem 5 anos. Então eu tenho que fazer adição para saber a idade dele. (C44)

Este problema ofereceu maior dificuldade para os alunos da escola A, talvez por apresentar um caso de adição contra-intuitivo, pois é preciso fazer uma adição, quando o contexto sugere que pensemos em resolvê-lo com uma subtração, como mostra a justificativa abaixo:

É de tirar, porque Leila tem 4 anos a menos que seu irmão.(A6)

[13] Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?

Em síntese, de acordo com os resultados obtidos, é possível afirmar que nos problemas que buscam a relação e que há incongruência entre a expressão a mais e a adição a dificuldade é maior, como é o caso do problema 3.4.

Quanto aos problemas da relação Composição de duas transformações os resultados apontam que esses foram os que apresentaram maior dificuldade para os alunos das três escolas, principalmente para os alunos da escola A.

Sobre o problema 4.1[14] evidenciamos nas justificativas dos alunos e nos registros durante a resolução, algumas das dificuldades apontadas por Vergnaud (1991) que podem ter contribuído para tornar esse problema difícil:

- a ausência de uma estado inicial;

Eu pensei em fazer duas contas 7 mais 5 para ver quantas ele tinha antes e depois eu fiz 12 menos 7 para ver com quantas ele tinha ficado. (C39)

Eu tô achando que o que eu fiz tá errado, porque ele tinha figurinhas? Se ele ganhou 5 e perdeu 7, ele tinha que ter figurinhas. (C44)

- dificuldade de inversão da seqüência temporal para organizar os números no algoritmo;

Pensei que tirando 5 que ele ganhou e tirando 7, mas 5 não dá para tirar 7. Então, ele perdeu 7, porque não dá para fazer.(B35)

[14] Eduardo disputou "bafo" duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?

Eu não consigo resolver porque 5 não dá para tirar 7, então não pode ser de menos. Tem que ser 5 vezes 7, porque 5 menos 7 não dava, porque 5 não dá para tirar 7. Eu escolhi essa forma porque é mais fácil. .(A6)

- presença de verbos antônimos: ganhou 5 figurinhas/ perdeu 7 constituindo um obstáculo devido à concepção primitiva de adição como ganho e subtração como perda. Dificuldade de perceber a relação entre as duas transformações

Eu pensei nas 5 figurinhas que ele ganhou e nas 7 que ele perdeu. Eu fiz de menos, para saber qual que é a maior, porque aqui não explica se ele ganhou ou perdeu. Ele fez os dois. (C52)

Quanto ao problema 4.3[15] da relação Composição de duas transformações a presença de verbos sinônimos, com mesma polarização perdeu/ perdido = subtração, deveria ter facilitado a escolha da operação, pois existe congruência entre o verbo e a operação a ser realizada. Porém não inversão da seqüência temporal no algoritmo, marcada pela dificuldade em subtrair o número menor do maior na coluna das unidades, fez com que os alunos oscilassem no momento da resolução, percebendo inviabilidade em subtrair, recorreram ao esquema - algoritmo da adição.

Eu fiz 13 mais 6, porque é mais fácil. (A9)

Em relação aos erros dos alunos nas operações de subtração, Vergnaud (1990, p.4) afirma que "os mais freqüentes (omitir o recurso, subtrair o número menor do

[15] Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

maior em cada coluna, independente de sua posição embaixo ou em cima) se prendem a uma conceitualização insuficiente da notação decimal".

Para os problemas desta relação, a adição ou a subtração são decorrentes das transformações que se sucedem. "As informações do enunciado são pertinentes somente às transformações, não sendo necessário conhecer qualquer um dos estados inicial, intermediário ou final" (VERGNAUD, 1997, p.14). Entretanto, apesar de ser desprezada pela estrutura do problema, a ausência de um estado inicial foi uma outra dificuldade destacada pelos alunos, como mostra a justificativa abaixo:

Eu não consigo resolver, porque *ele tá perguntando se ele perdeu ou ganhou figurinhas, mas aqui não fala quantas ele tinha. (C52)*

1.2 Resultados das provas coletiva e individual

Quando nos propusemos a aplicar uma prova coletiva e uma individual acreditávamos que ao compararmos os resultados de ambas teríamos um melhor desempenho na prova individual para todos os problemas propostos. Isso porque os alunos teriam oportunidade de pensar a respeito dos problemas, observar a resolução e alterar as estratégias apresentadas. Entretanto, os resultados sofreram algumas variações nas provas coletiva e individual para cada uma das relações, representadas nos problemas. Para determinadas relações o desempenho foi melhor no coletivo do que no individual e em outras esse quadro se inverteu.

Em relação aos problemas da relação Parte-parte-todo a quantidade de acertos no teste individual aumentou para todas as escolas, a não ser para o problema 1.1 desta relação, no qual os alunos da escola A tiveram mais acertos no teste coletivo do que no individual.

Quanto aos problemas da relação Transformação de Estados a quantidade de acertos, do teste coletivo para o individual, aumentou para o problema 2.2, nas três escolas, e diminuiu para o problema 2.6 nas escola A e C e manteve o mesmo percentual para a escola B.

Para os 3 problemas da relação Comparação de Estados, tivemos a seguinte variação na quantidade de acertos: para o problema 3.1 a escola A aumentou o índice de acertos, a escola B diminuiu e a escola C manteve o mesmo índice no coletivo e no individual. Já o problema 3.4 as escolas A e C diminuíram a quantidade de respostas certas e a escola B aumentou. Para o problema 3.5 a escola A diminuiu a quantidade de acertos e as escolas B e C aumentaram essa quantidade.

Quanto aos problemas da relação Composição de duas transformações foi possível verificar um acréscimo de acertos no teste individual em relação ao teste coletivo para todas as escolas, menos para a escola B que apresentou, para problema 4.3, o mesmo índice de acertos nas duas provas.

Em síntese, os resultados apontam que, apesar das diferenças apresentadas pelas escolas nas provas coletiva e individual, a escola C obteve uma quantidade maior de acertos em relação as demais escolas, seguida pela escola B e A.

2. A relação entre a freqüência de problemas nos manuais de Matemática usados como materiais didáticos e o desempenho dos alunos nas provas

Em relação aos aspectos didáticos, natureza e freqüência dos problemas nos manuais de Matemática utilizados como materiais didáticos, os resultados apontam que não é possível estabelecer uma relação entre esses aspectos e os acertos na resolução dos problemas, tendo em vista que essa relação se fez de modo particular para cada um dos casos.

Tomando como referência a quantidade de problemas 1.1 da relação parte-parte-todo presente no livro didático *Vivência e Construção* (30 problemas) era de se esperar que os alunos que utilizassem esse material apresentassem um bom desempenho na prova aplicada. A expectativa se confirmou somente para a escola C, não sendo verdadeira para a escola A. Para tentarmos entender com precisão os motivos que ocasionaram essa diferença seria preciso acompanharmos as aulas desenvolvidas pelas escolas. Contudo, não tivemos condições de realizar tal acompanhamento. O único diferencial, que pode ser considerado a partir dos dados coletados, está relacionado ao nível sócio-econômico, mais elevado na escola C.

Em relação à forma de resolução dos problemas, destacamos uma diferença entre os resultados apresentados pelas escolas A, B e C, que pode estar relacionada ao material didático. Para os alunos das escolas A e B as resoluções contemplam diferentes tipos de cálculo, mental e escrito. Para os alunos da escola A, acreditamos que essa diferença esteja relacionada ao nível sócio-econômico, tendo em vista que utilizam o mesmo material da escola C, onde os cálculos limitaram-se aos algoritmos ensinados pela escola, observados nos problemas propostos pelo livro, que exigem em sua maioria, cálculo exato e escrito. A estratégia preferida desses alunos compareceu engessada no algoritmo ensinado pela escola. Tal resultado vem ao encontro do estudo realizado por Carraher e Schliemann (1983) que demonstra que as estratégias ensinadas pela escola nem sempre são as preferidas pelas crianças das camadas mais pobres da população. O que não é o caso dos alunos da escola C, pertencentes à classe social média e média alta. Já para os alunos da escola B a diferença se fez, além desse aspecto, devido a presença de atividades no material apostilado que estimulam e requerem o uso de diferentes tipos de cálculo, exato e aproximado, mental e escrito.

As estratégias apresentadas pelos alunos da escola C demonstram que o trabalho com a resolução de problemas está voltado mais para a apreensão de técnicas de resolução e menos para o princípio de investigação, mais para um método de resolver problemas ou aplicar um algoritmo e menos com a intenção de levar o aluno a formular ou resolver problemas. Chevallard, Bosch e Gascón (2001), apontam que esse forma de encaminhar o trabalho com a resolução de problemas pode contribuir para o "aprisionamento" da matemática na escola.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo procurou analisar a resolução de problemas de estruturas aditivas de alunos de 3ª série do Ensino Fundamental, com o intuito de identificar que tipos de problemas apresentam dificuldades para os alunos, bem como os prováveis aspectos, de ordem cognitiva ou didática, que as condicionam. A análise das provas aplicadas e das entrevistas realizadas, bem como o levantamento dos problemas presentes nos manuais de Matemática, utilizados como materiais didáticos, nos permitiu tecer diversas considerações a respeito das dificuldades dos alunos diante dos problemas de estrutura aditiva.

Em relação aos aspectos cognitivos e à natureza dos problemas fizemos referência: 1) aos esquemas envolvidos na resolução do problemas aditivos; 2) a relação entre o cálculo mental e o algoritmo; 3) a relação entre linguagem e a operação, 4) ao contexto presente nos problemas de estrutura aditiva; 5) a relação de base que os problemas contemplam; 6) a seqüência temporal. A análise desses aspectos forneceu dados que nos permitiu descrever e analisar alguns tipos de dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos.

Em relação às provas aplicadas, este estudo mostrou que, independente da forma de aplicação, o índice de acertos foi menor nos mesmos tipos de problemas, pertencentes à relação Transformação de estados, à relação Comparação de estados e à relação Composição de duas transformações.

Quanto ao grau de dificuldade, concluímos que o mesmo passou a ser maior quando os problemas apresentaram incongruência entre a operação a ser realizada e os verbos ou expressões portadoras de informação (transformação, comparação de estados e composição de duas transformações); quando solicitavam as relações (comparação de estados) ou transformações (composição de duas transformações) e não os estados (inicial, intermediário ou final) e quando a resolução pedia a inversão da seqüência temporal (composição de duas transformações).

Este estudo mostrou também que a existência de incongruência entre a operação a ser realizada e as expressões portadoras de informação nos problemas da relação Comparação de estados não foi o único fator de dificuldade para os alunos, no momento da resolução. Ao analisarmos a quantidade de acertos para os dois problemas dessa relação que apresentavam incongruência, pudemos perceber que no problema 3.2, que buscava a relação entre o referido e o referente, a dificuldade foi maior do que no problema 3.3, no qual a relação já estava posta. Conforme apontado por Vergnaud (1990) resolver um problema depende da identificação da relação em jogo, o que nesse caso é mais difícil.

Em relação à questão de interpretar o problema ou poder ler e transformar um significado em outro, nos pareceu depender de um invariante subjacente, sem o que não é possível resolvê-lo adequadamente. Isso aponta que a hipótese da Damm (1995) sobre a linguagem ou sobre uma forma de representação que facilite a identificação da relação do problema pode ajudar, mas não é suficiente. Tomemos como exemplo o problema 3.2 *José tem 34 anos e seu filho tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?* A estrutura da primeira oração não permite alterações, pois é nela que estão os dados numéricos relativos aos estados. Quanto à segunda oração, algumas mudanças podem ser pensadas na tentativa de identificar a relação em questão: Qual a diferença entre as idades de Paulo e José? Quantos anos faltam para que Paulo tenha a mesma idade de José? Entretanto, para esse problema a questão não pode ser resolvida apenas transformando a redação do problema. Quando o que se pretende descobrir é a relação, ela continua não comparecendo objetivamente, mesmo quando se transforma a redação. Tal fato corrobora a idéia de Vergnaud (1990) quando afirma que a linguagem comunica esquemas, mas não os cria. A linguagem só tem sentido na presença de esquemas e situações.

No que se refere aos aspectos didáticos, no caso deste trabalho, relativos apenas à freqüência e distribuição dos problemas no material didático, utilizado pelas escolas, verificamos que, no geral, não foi possível estabelecer relação entre a freqüência e natureza dos problemas nos materiais analisados e o desempenho dos alunos nas provas aplicadas. Isso porque houve bom desempenho tanto com poucos problemas quanto com muitos problemas presentes no livro didático ou no material apostilado. Assim como houve desempenho ruim com muitos e poucos problemas. Alguns resultados nos permitem fazer essa inferência: o desempenho ruim apresentado pelos alunos da escola A para o problema 1.1 da relação Parte-parte-todo, que se apresentou em maior quantidade no material didático utilizado pela escola. Assim como, o bom resultado apresentado pelos alunos da escola B para o problema 2.6 da relação Transformação de estados que compareceu em apenas 1 problema do material apostilado utilizado pela escola (TABELA 32). A relação entre freqüência e natureza dos problemas e o desempenho dos alunos pode ser estabelecida, em parte, para os problemas da relação Composição de duas transformações, que não compareceram em nenhum dos materiais analisados e apresentaram resultados aquém dos demais problemas. Em parte pois, além da ausência desses problemas nos materiais analisados, a própria estrutura dos problemas dessa relação dificulta a resolução por ser mais complexa do que as demais.

Os resultados apontaram ainda que a escolha do material didático não foi suficiente para formar bons solucionadores de problemas, tendo em vista que escolas que utilizavam o mesmo material apresentaram desempenho diferente.

Diante de tais resultados seria preciso considerar que outros aspectos didáticos podem ter influenciado a resolução destes problemas. Muito provavelmente, aspectos metodológicos como o exercício da leitura compreensiva e interpretação do contexto do problema, o desenvolvimento de recursos capazes de desafiar o aluno para mobilizar os esquemas necessários à resolução de problemas de relações diversas; as solicitações para o desenvolvimento da intuição, do cálculo mental, da estimativa, a proposição de situações diversificadas para explorar as contradições das palavras que funcionam como "pistas", podem ter influenciado o desempenho dos alunos em maior ou menor grau.

Em síntese, o êxito dos alunos na resolução de problemas pareceu depender, em parte, da natureza das relações envolvidas e, em parte, da metodologia de trabalho praticada pelo professor.

De qualquer forma, todos esses aspectos apontam para a figura do professor e sua maneira de conduzir a resolução de problemas em suas aulas, como um elemento crucial, porque antes de tudo cabe a ele o mapeamento da situação e o planejamento para equilibrar os diferentes aspectos em jogo, sejam os ligados ao processo cognitivo do alunos, sejam os didáticos que precisam ser pensados para levar os alunos a compreender e resolver problemas. Em outras palavras, reafirmamos a importância do papel do professor enquanto mediador, provedor de situações problemáticas, estimuladoras da interação sujeito-situação e que leva à ampliação e à diversificação dos esquemas de ação.

Embora no caso desta pesquisa não tivéssemos a intenção de examinar a metodologia de ensino dos professores, os resultados nos remetem necessariamente a alguns questionamentos : Como o professor concebe esse papel e o põe em prática quando trabalha com a resolução de problemas? Será que consegue perceber a diferença entre envolver os alunos com problemas geradores de investigação e treinar os alunos nas técnicas de resolução? Como e com qual finalidade utiliza o material didático? Quais os critérios que utiliza para selecionar as situações que serão propostas aos alunos? Tem conhecimento da diversidade de situações que a adição e a subtração permitem engendrar? Consegue compreender as dificuldades cognitivas impostas em cada classe de situação?

Frente aos resultados apresentados, não podemos desconsiderar tais questões, cujas respostas poderiam provavelmente fornecer explicações mais precisas sobre as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. De qualquer forma, acreditamos que o professor tem um papel fundamental na superação de tais dificuldades, quando entende que os problemas visam à construção dos conceitos e que a operacionalidade desses deve ser provada diante de situações variadas.

No entanto, sabemos que muitos professores, na sua formação inicial, não são postos em contato com essa variedade de situações e continuam reproduzindo um ensino voltado para apreensão de regras e convenções, no qual a resolução de problemas é encarada como forma de aplicação dos conceitos. Portanto, é preciso repensar os cursos de formação, principalmente os voltados para a formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental que iniciam a trajetória de construção dos conceitos. É preciso que se tenha clareza dos aspectos cognitivos envolvidos na resolução dos problemas e da natureza dos problemas que são propostos aos alunos.

Sabemos que a maneira como está organizada a formação inicial, baseada na racionalidade técnica que fragmenta as metodologias em semestres, não permite suscitar os questionamentos apontados anteriormente. Os momentos destinados às disciplinas metodológicas são utilizados muitas vezes para aprendizagem de alguns conteúdos e muito pouco para discutir os aspectos metodológicos envolvidos nesses conteúdos. Sendo assim, o mercado absorve todos os anos inúmeros professores que continuam a reproduzir um ensino mecânico e baseado na apreensão de regras. Situação que é inflamada pelos cursos de formação continuada que apresentam, na maioria das vezes, uma estrutura desvinculada dos interesses desses mesmos professores e que em nada acrescentam para uma ação pedagógica voltada para a formação de conceitos.

REFEÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. e ONUCHIC, L. de la R. A resolução de problemas e o uso do computador na construçào do conceito de Taxa Média de Variação. *Revista de Educação Matemática,* Ano 8, nº 8, 2003, p.37-41

ALVES, E. V. *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio.* Dissertação (Mestrado em Educação) 1999. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.

BRANDÃO, A. C. P e SELVA, A. C. V. O livro didático na educação infantil: reflexão *versus* repetição na resolução de problemas matemáticos. *Educação e Pesquisa,* jul./ dez. 1999, vol. 25, n. 2, p. 69-83.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* V. 3: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

________. *Sistema de avaliação da Educação Básica- SAEB,* Brasília: MEC/SEF,2001.

BRITO, M. R. . Solução de problemas matemáticos. *Conferência apresentada no concurso para professor titular.* FE- UNICAMP. Dezembro, 2001.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 9, nº 3, pp. 309-336, 1988.

______________. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas,1996.

CARNOY, M., GOVE, A. K., MARSHALL, J.H. As razões das diferenças de desempenho acadêmico na América Latina: dados qualitativos do Brasil, Chile e Cuba. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 84*, p.7-33.

CARRAHER, T. N. & SCHLIEMANN, A. D. A adição e a subtração na escola: algoritmos ensinados e estratégias aprendidas. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *64* (148), 1983, 234- 242.

CASTRO, E., RICO, L., CASTRO, E. *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org) *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas,1996, p.36-47.

CHEVALLARD,Y; BOSCH, M;GASCÓN,J. *Estudar matemáticas*. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? *Temas & Debates*, Ano II, n.2, p.15-8, 1989.

DAMM, R. M. Compreensão de problemas aditivos. *Cadernos de Educação Matemática*, Seminário de Didática da Matemática, Vol. II, PUC –SP, 1995.

____________ Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP :Papirus, 2003.

DINIZ, M. I. V. de S. Uma visão de ensino de matemática. *Temas e Debates,* Ano IV, n. 3, p.27-30, 1991.

DOLLE, J. M. *Para compreender Jean Piaget: uma iniciação à Psicologia Genética Piagetiana.* Rio de Janeiro: Zahar Editores,1983.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A Solução de Problemas em Matemática, p.41-65, In: POZO, J. I. (org.) *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ArtMed,1998.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A e POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org.) *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ArtMed,1998.

FIGUEIREDO, R. M. E. & GALVÃO, O. de F. Estratégias de resolução de problemas matemáticos em crianças do ensino fundamental: um estudo descritivo. In: CARMO, J. dos S. *Dificuldades da aprendizagem: o instrumento da análise do comportamento no ensino da leitura, escrita e conceitos matemáticos.* Belém: UNAMA, 1999

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. *Educação matemática uma introdução.* São Paulo: EDUC, 1999, p.155-95.

GAZIRE, E. S. Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) UNESP / Rio Claro.

GOMES, M G. *Solução de problemas de matemática: procedimentos utilizados por sujeitos com grausde escolaridade diferentes.* Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação: Universidade Estadual de Campinas, 1998.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A. e TOLCHINSKY, L. *Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e ,matemática.* São Paulo : Editora Ática, 1997.

GROSSI, E. P. *Campo conceitual da matemática na alfabetização numa incursão primeira.* Fundação Educacional: Governo do Distrito Federal, (s/d).

HOUSE, P. A. aventurando-se pelos caminhos da resolução de problemas. In: KRULIK, S, REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar.* Trad. de Domingues, H. H., Corbo, O. São Paulo: Atual, 1997.

KOCH, N. *O professor, os alunos e a formação das competências matemáticas: o caso das estruturas aditivas.* 2002.120f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Paraná.

LOPES, A. J. e MANSUTI, M. A. Resolução de problemas: observações a partir do desempenho dos alunos. *A educação matemática em revista- SBEM,* n. 3, 2º sem.,1994, p.34-40.

LOPES S. V. de A. *A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos.* 2002.Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

MORO, M. L. F. Adição/Subtração: Os caminhos de sua psicogênese na aprendizagem. *VII Simpósio Nacional de Pesquisa e Intercâmbio Científico,* Gramado, 1998.

MULLER, I. de F. S. *resolução de problemas no ensino da matemática: uma discussão das metas Ibero-americanas.* Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdades Integradas de Palmas FACIPAL- PR, 2002.

NUNES, T. & BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ONUCHIC, L. de la R e ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. e BORBA, M.(org.) E*ducação matemática: Pesquisa em movimento.* São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(org.) *Pesquisa em educação matemática: concepção e perspectivas.* São Paulo: Editora Unesp, 1999.

PAIS, L. C. *Didática da matemática; uma análise da influência francesa.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

________.Transposição didática. In: MACHADO, S. *Educação matemática uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999, p.13-42.

PASSONI, J. C. e CAMPOS, T. M. M. . Revisitando os problemas aditivos de Vergnaud de 1976. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.*Campinas, SP :Papirus, 2003.

PIAGET, J. I Aprendizagem e Desenvolvimento. In: PANCELLA, J. R. e NESS, J. S.V. *Studying Teaching*. Prentice Hall, 1971.

PONTE, J. P. e SERRAZINA, M. de L. D*idática da matemática do* 1^0 *ciclo.* Universidade Aberta, (s/d)

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school.* In: KRULIK, S, REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar.* Trad. de Domingues, H. H., Corbo, O. São Paulo: Atual, 1997.

TEIXEIRA, L. R. M. *Aprendizagem escolar dos números inteiros: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana.* 1992. Tese (Doutorado em Psicologia). Universidade de São Paulo.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticos de ensino. In: SCHILEMANN, D., CARRAHER, D.(orgs.) *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa.* Campinas, SP: Papirus, 1998.

VERGNAUD, G. *Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática: algumas questões teóricas e metodológicas.* Trad. de Weiss, J. Apresentação concedida para o grupo Canadense de Estudos em Educação Matemática na Queen'se University, Kingston, jun.1982.

_________. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Trad. de Franchi, A., Carvalho, D. L. *Psychologie Française,* n 30-3/4, p.245-52, nov.1985.

__________ Teoria dos campos conceituais. Trad.(?) *Recherches en Didactique des Mathematiques.* 1990.

_________ *A apropriação do conceito de número: um processo de muito fôlego.* Trad. de Fávero, 1991.

_________. *A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos.* 1996.

_________. *Le Moniteur de Mathématique*. Paris: Éditions Nathan, 1997.

ZUNINO, D. L. de. *A matemática na escola: aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXO

Problemas que compuseram as provas coletiva e individual

1. Carlos perdeu 35 figurinhas num jogo com Eduardo. Ele tem agora 12. Quantas ele tinha antes de jogar?
2. Um elefante pesa 4000 quilogramas e seu filhote, 1700 quilogramas. Quantos quilogramas pesam os dois juntos?
3. Eduardo disputou “bafo” duas vezes com seu amigo. Na primeira vez, ganhou 5 figurinhas e na segunda, perdeu 7. Pensando sobre os resultados das duas disputas, ele ganhou ou perdeu? Quantas figurinhas?
4. Lúcia tinha R$ 360.00 e gastou R$ 120.00. Quantos reais ela tem agora?
5. Flávia tem 3 bonecas a mais que Amanda. Amanda tem 4. Quantas bonecas tem Flávia?
6. José tem 34 anos e seu filho Paulo tem 12. Quantos anos José tem a mais que Paulo?
7. Renato disputou figurinhas no bafo de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?
8. Juntos conseguimos economizar 750 reais. Eu economizei 340 reais, e você?

9. Leila tem 4 anos a menos que seu irmão Pedro. Ela tem 5 anos. Qual a idade de seu irmão?